



拉格朗日点的计算


万精油

去年底，随着韦伯望远镜的升空，拉格朗日点成了一个热词。大家都知道拉格朗日点的定义，但是对于其具体计算还是不清楚。实际上，如果真正懂了定义，计算应该不是问题，所以归结起来还是没有完全懂得其定义。有好几个人问我具体定义与计算，给他们讲解以后我决定干脆把它写出来放到这里，或许别的人也会有兴趣。

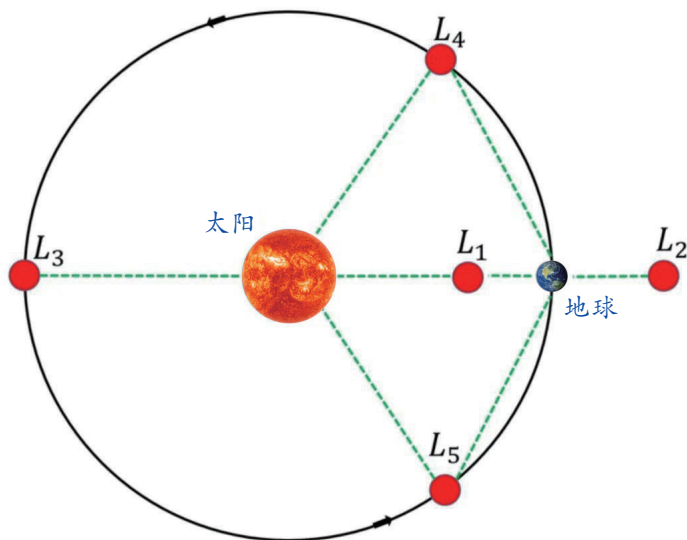
拉格朗日点是一个三体问题。一般的三体问题没有简单解答，所以，拉格朗日点实际上是一个有限制的三体问题，三体中的一个的质量与另外两个比起来可以忽略不计（比如卫星与地球和太阳）。

在讨论拉格朗日点以前，我们先来看一个简单情况。在两个静止大质量物体 (A, B) 之间的连线上有另一个物体 C 。如果 C 离 A 近，那么它受 A 的吸引力更大， C 就落向 A 。反之，如果 C 离 B 近，那么它受 B 的吸引力更大， C 就落向 B 。显然，在 AB 的连线上必然有一点，这个点受到 A, B 的吸引力相同，这个点上的物体就呆在那里，不向任何一方落去，这个点就是一个不动点。不过，这个不动点是不稳定的，稍微有一点扰动，这个平衡就被打破，物体就向某一方落去。

上面说的那个不动点与拉格朗日点 L_1 有点相似， L_1 也是两点连线之间的



一个不动点，不过 L_1 没有这么简单。因为空间中没有静止的东西，两个相近的物体一般来说都是一个绕着另一个转。这个时候的不动点就要考虑角速度。 L_1 就是在这个意义下的不动点，角速度相同。就是说与地球绕太阳的公转同步。我们下面就来看一下如何根据这个定义来求出这个不动点的位置。



假设地球与太阳之间的距离是 R , L_1 离地球的距离是 μR , 离太阳的距离是 $(1-\mu)R$, 太阳的质量是 S , 地球的质量是 E 。在这些定义下, 牛顿第二定理告诉我们, 地球受太阳的吸引力是 GSE/R^2 。开普勒定律说, 一个物体绕另一个物体转, 离心力与角速度 ω 之间的关系是

$$F = m\omega^2 R.$$

其中, m 是物体的质量。对地球绕太阳转来说, $m = E$, 我们有

$$GSE/R^2 = E\omega^2 R,$$

也就是

$$\omega^2 = GS/R^3,$$

这个 ω 就是地球绕太阳公转的角速度。

我们再来看处于 L_1 的质量为 m 的小物体绕太阳公转的速度。一般来说, 一个物体离另一个物体越近, 那么绕它旋转的时候就越快, 因为需要用更大的离心力来平衡更大的重力吸引力。按道理, 处于两点连线上的点离太阳更近, 应该旋转更快。但是, 太阳与地球之间连线上的物体同时受太阳与地球的吸引, 距离分别为 $(1-\mu)R$ 和 μR , 吸引力为

$$GmS/((1-\mu)R)^2 - GmE/(\mu R)^2.$$