概率普适性的新探索——以 KPZ 方程为例

马英浩 / 文　　许惟钧 / 指导

从 18 世纪开始，数学家们逐渐发现，独立性较强的大量随机微小系统的宏观的表现总是具有某种规律。例如强大数定律、中心极限定理和随机游走与布朗运动的联系。在此基础上，人们开创了随机分析的相关理论，为进一步理解概率世界提供了可能，并在物理、金融、人工智能等诸多领域有很多应用。然而，相比随机常微分方程有一些相对完备的理论，随机偏微分方程的解的定义、稳定性都有待数学家们探索，更不必提相关的普适性问题。很多物理学家和数学家为此付出了艰苦卓绝的努力，特别是英国数学家马丁 • 海勒（Martin Hairer）的正则结构理论极大推动了人们对有关问题的理解，他本人也因此获得 2014 年的菲尔兹奖和 2021 年的数学突破奖。本文以一个二元函数所满足的随机偏微分方程（KPZ 方程）为例，对随机偏微分方程及其背后的普适性理论做简要的介绍。

概率普适性

最晚在 18-19 世纪，从事概率研究的数学家们，例如棣莫弗（de Moivre, 1753）和拉普拉斯（Laplace, 1812）就认识到：如果一个随机变量是很多不同来源的随机变量共同决定的，每一个不同来源的随机变量的细节似乎变得无伤大雅——不论微小系统的随机性具体是怎样的，宏观的表现总是差不多。这样的现象被称为普适性（universality）原则。

本科低年级的《概率论》课程中就包含了这样的例子。期望有限独立同分布的一列随机变量的平均几乎处处收敛到期望，因为它们很难同时以同样的方式偏离期望。事实上在方差满足一定条件的情况下，这样的独立随机变量不必是同分布的。

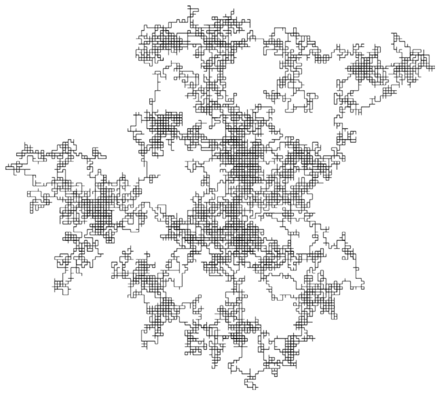
$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k=\mu\right)=1$$

强大数定律

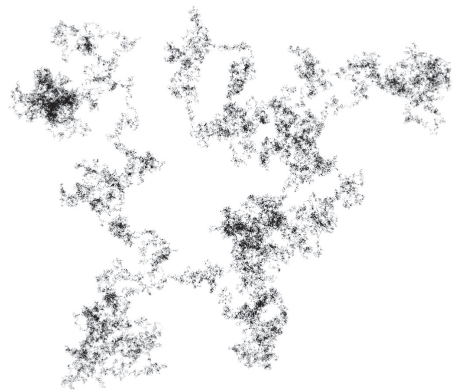
此外，不太严格地说，这一列随机变量求和如果不是除以 n 而是除以 $\sqrt{n}$（为了保证极限存在还需要减去均值），那么得到的结果则不会被压缩到一个确定的数，而是会产生一个随机数。中心极限定理告诉我们这个随机数服从高斯分布——这也是普适性的体现。

除了随机变量，很多更复杂的概率对象，例如随机游走，也蕴涵某种意义的“普适性”。在 18 世纪末期荷兰生理学家英格豪斯（Jan Ingenhousz）在观

测酒精中的煤粉运动时第一次观测到了布朗运动（Brownian motion）。此后英国植物学家布朗（Robert Brown）于 1827 年研究了水中花粉迸裂出的微粒的不规则运动，并排除了微生物干扰的因素，因此后人通常称这种运动为布朗运动。现在一般认为，粒子的布朗运动是由于受到周围水分子每秒约 10^{21} 次的不规则碰撞造成的，粒子在 t 到 $t+\triangle t$ 的时间内被水分子碰撞了足够多的次数，受力的时间平均可以认为反应了 t 时刻受力的分布规律——通常认为是均值为 0 的高斯分布。随着对布朗运动了解的深入，人们发现它还是很多其他“微观随机运动”的宏观表现。



二维平面随机游走（5000 步）



二维随机游走 200 万步

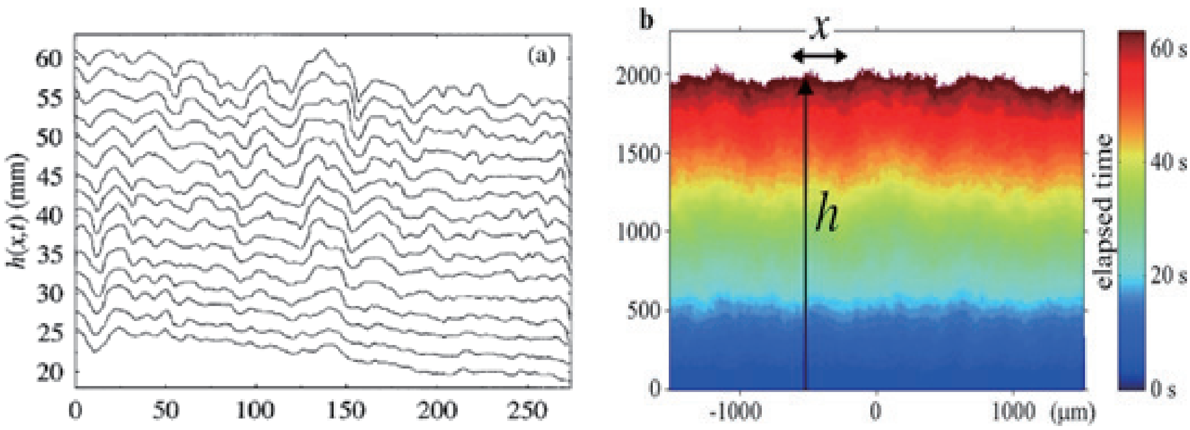
在 1900 年，法国数学家巴施里耶（Bachelier）在博士论文中给股票价格变动建立了数学模型，考虑到价格波动是由大量独立的个体分别出售股票或买入股票引发的，而一个人买入股票会让股票价格略微上涨，出售则会略微下降，因此价格的变动在某种意义上可视作随机游走的极限。5 年后，爱因斯坦和斯莫鲁霍夫斯基（Smoluchowski）完成对花粉的布朗运动建模，揭示了同样的数学规律。而直到上世纪 20 年代数学家维纳才从数学的角度给这样的运动下了严格的定义。在 1951 年，美国数学家邓斯克（Donsker）才证明了逐渐归一化的随机游走最终弱收敛于布朗运动，从而揭示了布朗运动的普适性。

界面增长模型和 KPZ 方程

一维布朗运动可以视作时间的随机函数，不同时刻的行为有着很强的独立性。虽然路径十分粗糙，但关于它的数学理论已经相对完善。伊藤清在 20 世纪 30–40 年代建立发展的随机分析理论可以帮助人们对布朗运动做微积分并深入理解由布朗运动所驱动的微分方程 [1]。然而还有一些类似的概率现象，我

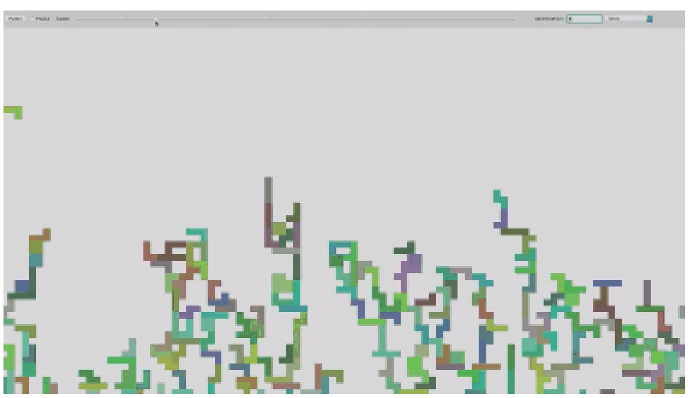
[1] 例如以此为基础的布兰克 – 斯科尔斯公式给期权定价建立了数学模型，默顿（Robert Merton）和斯科尔斯（Myron Scholes）因此获 1997 年诺贝尔经济学奖；颁奖时费希尔 • 布兰克（Fischer Black）已去世两年。

们却对其知之甚少。界面增长模型就是这样的一个例子：假如同时点燃一张 A4 纸的一条边，燃烧和未燃烧的分界线会向上方蔓延，受到各种因素影响，分界线十分粗糙，但似乎蕴含了某种数学规律。而这样的物理在例如森林火灾的蔓延、液晶中不同物质的分界线等物理场景中有很大的应用。



界面增长模型不同时刻边界示意，左侧引自 Maunuksela & AI, PRL, 右图 Takeuchi& Al, Sci. Rep.

一些离散的数学模型也被认为蕴含了这样的界面增长模型的性质，例如随机掉落的俄罗斯方块，由于相邻列之间存在一些局部的相互作用——由于相邻的列使得该列的方块不落到最底部，其总高度随时间的变化在经过一定尺度变换后也蕴含了同样的连续函数[2]。



Martin Hairer 对俄罗斯方块的随机模拟程序结果

离散情况下的数学模型虽然应用广泛，但相应的分形标度参数需要通过随机模拟实验才能确定，包括物理学家卡达尔（Kardar）在内的很多物理学家尝试为上述过程建立连续函数近似，并通过随机微分方程揭示物理现象的

[2] Kardar, M; Parisi, G, Zhang, Y. C., Dynamic scaling of growing interfaces. Phys. Rev. Lett., 1986, 56: 889-892.