L- 函数：她的前世和今生

张寿武

L- 函数是数论里面一个重要的不变量，本文将讲述它的历史。进入正题之前，有必要对写作初衷稍作解释。

数学是关于形和数的学问，并且是科学的语言，所以大家把数学置于很重要的地位。数学家的一项工作就是教书，比如一个星期教三节微积分。那么，授课之外数学家私下在做些什么，他们做的东西有什么意义？这是本文要讲的内容：L- 函数可以说就是数学家教完课之后在家里想的东西。

数论是数学里面很特殊的分支，有人说学数论就是学数学。而 L- 函数在数论中的地位非常高，但它是一个非常神秘的概念，我们并不知道它从哪里来，也不知道它要到哪里去。我跟大家共同的基础在中小学阶段，因此我们先回到中小学数学里面去。

1 猜测的艺术

1.1 等幂求和

读小学一、二年级的时候大家都说高斯非常聪明，很快就找到公式计算出 $1+2+3+\cdots+99$ 的值，但是可以相信高斯绝不是第一个发现这个公式的。普遍来说，这是一个非常简单的中学题目：给定正整数 k，

$$S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$$

是否存在求和公式？这是一个非常好的游戏，这个游戏大家在学数学归纳法的时候用了很多次。当 $k=0$ 时，每一项都是 1，所以 $S_0(n)=n$。可以认为 n 就是这样定义出来的。

当 $k=1$ 时，就是刚才提到的

$$S_1(n)=\frac{n(n+1)}{2}.$$

高斯 (1777-1855)

大家认为这是高斯给出的公式。实际上这个公式的证明要比高斯早了很多年，大约是公元前 550 年毕达哥拉斯证明的。在数学界，人们喜欢把重要的定理归功于一个著名人物。毕达哥拉斯是一个很著名的数学家，这个定理也未必是毕达哥拉斯首先证明的，但是我们还是把这个功劳给了他。

当 $k = 2$ 时，$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ 也有一个漂亮的公式，即

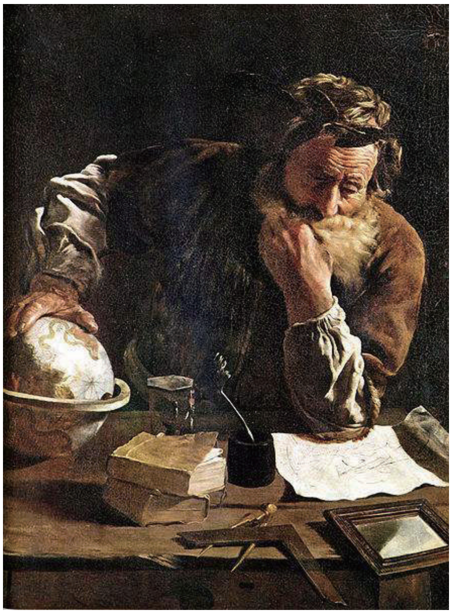
$$S_2(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

大家公认把这个功劳给了阿基米德，阿基米德也是个非常了不起的大数学家，这是发生在大约公元前 250 年的事情。

当 $k = 3$ 时，直到 476 年才给出公式，这中间的时间很长。之所以间隔这么长时间，应该是好多人没想过这样的事情。因为 $k = 2$ 时是二次型，大家花很多时间考虑二次型，但是很多数学家大概不会去考虑三次型。这个三次型的求和公式很漂亮，

$$S_3(n)=\frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

换句话说，$S_3(n) = S_1(n)^2$，这件事情很有趣，但事实上完全是个巧合，没有任何实际的道理，但确实是一个很重要的巧合。



左：毕达哥拉斯（约公元前 570 年 - 约前 495 年），右：阿基米德（公元前 287 年 - 前 212 年）

1.2 一般求和公式

唐末宋初年代，是中国科学的高峰，但在西方社会，科学这时才刚刚开始。如英国、德国、法国这些西方国家，科学在中世纪之后才刚刚开始兴起，从那时起涌现出了一批学者：费尔马、帕斯卡、雅各布 • 伯努利等。他们开始考虑

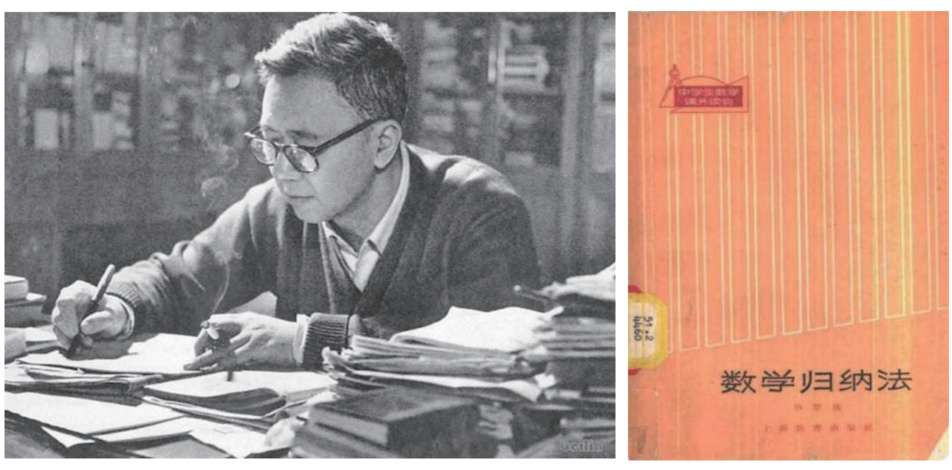
$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$$

有没有一般的求和公式。他们每个人都分别证明了 $S_k(n)$（称为等幂的求和）确实有一般的求和公式

$$1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k = a_{k1}n + a_{k2}n^2 + \cdots + a_{k,k+1}n^{k+1}, \quad a_{ki} \text{ 是有理数 .}$$

费尔马是很了不起的人，他的职业是法官，还是一位业余数学家。他考虑过这个问题，实际上，他在当时差不多已经知道微积分的基本内容，比如积分、微分与变分法。如果知道微积分的话，就能知道这个一般的求和公式，因为求和可以用积分来逼近，所以可以先得到一个逼近的公式，然后再用数学归纳法证得。我在初中时读了本小册子，叫做《数学归纳法》，在里面我知道 $1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$ 存在一般的求和公式，这本书是华罗庚先生写给中学生的科普书。在这本小册子里面，华先生先把这个一般公式写下来，然后证明，但是他并没有告诉如何得到这个公式。粗略地讲，如果知道 $k = 1$ 时的公式，那就能求出 $k = 2$

费尔马 (1607-1665)



华罗庚（1910-1985）与《数学归纳法》

时的公式，如果知道 $k=1, 2$ 时的公式就可以知道 $k=3$ 时的公式，可以用数学归纳法证出来，一般公式的存在性是依赖于所有前面的公式。但是能否找到一个不用数学归纳法就能直接证明出来的公式？这是一件有趣的事情。

1.3《猜测的艺术》

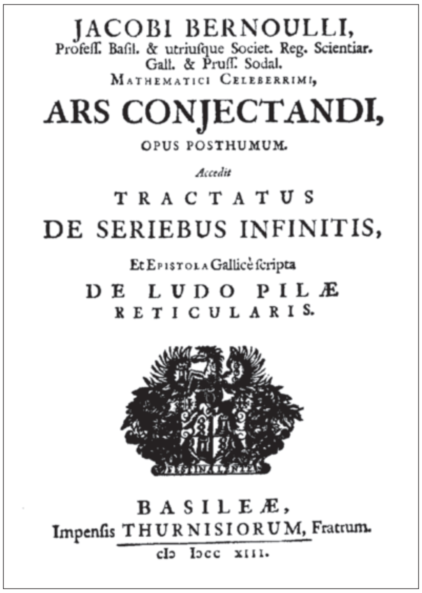
这件事情第一次出现在雅各布•伯努利的书里面。在他去世之后，大概 1707 年出版的这本书叫做 *Art of Conjecturing*。书名本身就非常有意思，叫《猜测的艺术》。但它并不是讲关于猜测的事情，而是一本关于概率和组合的经典著作。在该书中，伯努利第一次证明了大数定律，大致给出了大数定律的一个初等表述。雅各布•伯努利是伯努利家族的第二代。他的父亲有两个儿子，他们跟着莱布尼茨学习，而莱布尼茨是微积分的创造者之一。伯努利家族生活在瑞士一座名叫巴塞尔 (Basel) 的小镇上，那里产生过不少名人，除伯努利家族外，还有下面将要提及的欧拉。当然，也有其他领域的名人，比如网球明星费德勒，巴塞尔有他的网球场和网球俱乐部。在伯努利的书中，第一次引进了伯努利数。伯努利数 B_j 用下式定义

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{j=0}^{\infty}B_j\frac{z^j}{j!},$$

即 B_j 是 $\frac{z}{e^z-1}$ 的泰勒展开式中 $\frac{z^j}{j!}$ 前的系数。伯努利利用伯努利数给出了 k 次项的等幂求和公式

$$S_k(n)=\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_{k+1}^j B_j n^{k+1-j},$$

其中 C_{k+1}^j 是二项式系数。



JACOBI BERNOULLI,
Profeſſ. Baſil. & utriuſque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruſſ. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè ſcripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.
BASILEÆ,
Impenſis THURNISIORUM, Fratrum.
cIɔ Iɔcc XIII.

雅各布•伯努利 (1655-1705) 与《猜测的艺术》

莱布尼茨（1646-1716）

杨辉（1238-1298）与杨辉三角

1.4 杨辉 - 帕斯卡三角

上述的求和公式中用到了伯努利数。实际上如果用杨辉三角的话，还有更简单的表达方式。杨辉三角是关于二项式的展开式中 $(x+y)^n$ 的系数，即

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}.
$$

如果将杨辉三角稍微做一点小的变换，比如求两个 k 次方数之差，就能得到这些数：

$$
\begin{aligned}
n-(n-1)&=1,\\
n^2-(n-1)^2&=-1+2n,\\
n^3-(n-1)^3&=1-3n+3n^2,\\
&\vdots\\
n^k-(n-1)^k&=c_{k1}+c_{k2}n+c_{k3}n^2+\cdots+c_{kk}n^{k-1}.
\end{aligned}
$$

而实际上，等幂求和公式和杨辉三角之间存在非常精妙的关系：将前面两个公式

$$
\begin{aligned}
S_k(n)&=\ a_{k1}n+a_{k2}n^2+\cdots+a_{k,k+1}n^{k+1},\\
n^k-(n-1)^k&=c_{k1}+c_{k2}n+c_{k3}n^2+\cdots+c_{kk}n^{k-1}
\end{aligned}
$$

中的系数分别放在两个下三角矩阵中，

$$
\begin{pmatrix}
a_{01} & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \cdots\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix},\quad
\begin{pmatrix}
c_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
c_{21} & c_{22} & 0 & 0 & \cdots\\
c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & \cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}.
$$