浅谈等角线与符号图

李佳儆 / 文　史永堂 / 校对

小时候，我们大概都会喜欢在纸上乱涂乱画。也许你想过这样一个问题：在纸上画一些直线，希望任意两条直线形成的夹角都相同，那么我们最多能画多少条这样的直线呢？对于纸面这样的二维平面，不难得到最多的数目是 3 条，等边三角形的 3 条边所构成的直线就是满足条件的构造。我们称这样的两两夹角相同的直线为等角线。那如果我们在三维欧式空间中寻找两两夹角相同的直线，最多能够有多少条呢？一个比较直观的想法是，三维坐标中 3 个坐标轴构成的直线两两垂直，这给出了 3 条等角线，但这不是最多的构造。在三维空间中，考虑一个正二十面体，它由 20 个面和 12 个顶点构成。通过连接相对顶点可以形成 6 条相交的对角线（如图 1 所示），可以看出其中任何一对直线都会形成一个固定的角。事实上，可以证明这个构造是最优的，即三维空间的等角线数目最多为 6 条，详见下文。

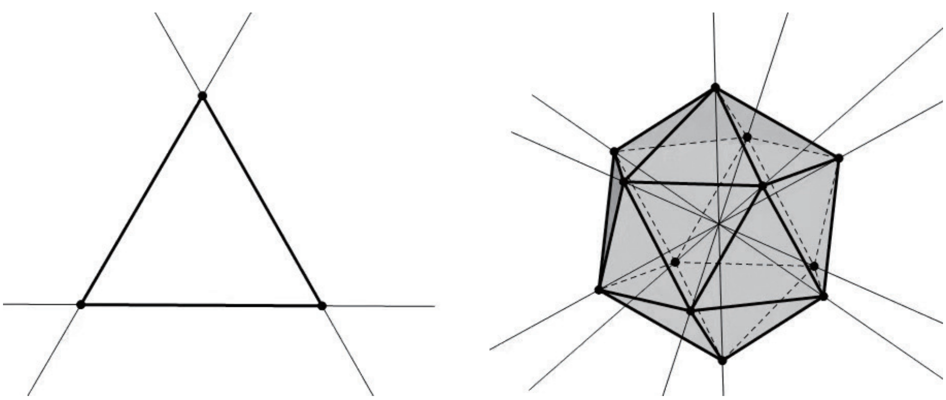

图 1. 等边三角形和正二十面体形成的等角线

一般的，在 n 维欧式空间中，最多能够找到多少条等角线呢？这是离散几何中一个著名的公开问题。这样的等角线问题也自然出现在椭圆几何学、多面体理论、Grassmannian 框架理论、编码理论等数学的许多领域中。在一般的大于三维的空间里，我们无法真正想象出等角线的构造是什么样子的，这也是很难找出任意 n 维空间中等角线最大数目的原因之一。

为了方便起见，我们可以把这个问题用向量的语言重新描述一下。任意一

条 n 维空间的直线可以用一个 n 维单位列向量来表示，而两条直线间的夹角余弦值即为对应两个向量的内积。这样等角线的最大数目问题可以转换成如下形式的等角线问题：对于给定正整数 n，求最大的正整数 $k = k(n)$ 使得存在 k 个 n 维单位列向量 $x_1, x_2,\cdots, x_k$ 和角度 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 满足对于任意都有

$$|<x_i, x_j>| = \cos\theta.$$

对于这个问题，Gerzon 在 1973 年 [1] 利用一些基本的线性代数知识给出了一个非平凡的上界 $k(n)\le\frac{1}{2}n(n+1)$ 。下面我们叙述一下 Gerzon 这个漂亮的证明。要证明这个上界，只需要证明 $n\times n$ 的实对称矩阵组 $\{x_i\, x_i^T\,|1\le i \le k\}$ 线性无关即可。事实上，所有的 $n\times n$ 实对称矩阵是构成一个 $\frac{1}{2}\, n(n+1)$ 维线性空间的，上述矩阵组线性无关即可推出 $k\le \frac{1}{2}\, n(n+1)$ 成立。下证矩阵组 $\{x_i\, x_i^T\,|1\le i \le k\}$ 线性无关。考虑线性组合 $\sum_{i=1}^{k} c_i x_i x_i^T = 0$ ，其中 $c_1,c_2,\cdots, c_k$ 为实数。将等式中左乘 x_j^T 再右乘 x_j 可得 $\sum_{i=1}^{k} c_i x_j^T x_i x_i^T x_j = 0$ ，即

$$0=\sum_{i=1}^{k} c_i x_j^T x_i x_i^T x_j = \sum_{i=1}^{k} c_i\,|<x_i,x_j>|^2 .$$

取遍所有 $1\le j\le k$ 组成一个关于 $c=(c_1, c_2,\cdots, c_k)^T$ 的线性方程组 $Ac=0$，其中，$A=(1-\cos^2\theta)\, I_k+(\cos^2\theta)\, J_k$。由 $\cos\theta\neq 1$ 可知 $rank(A)=k$，因此线性方程组的唯一解是 $c=0$，从而矩阵组 $\{x_i\, x_i^T\,|1\le i \le k\}$ 线性无关。这样我们就证明了 Gerzon 的上界 $k(n)\ \le \frac{1}{2} n\ (n+1)$。

值得注意的是，当 $n=3$ 时，这个上界由上文中二十面体的构造取到，因此它是紧的，无法改进。目前已知的 n 维空间等角线的一般下界是由 de Caen 等人构造的 $k(n)\ge\frac{32}{1089}n(n+1)$ 。对于一些特殊的维数 n，这个下界也可以大幅提高到 $\frac{2}{9}n(n+1)$ ，但离 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 的上界还相差较大。经过一些数学家的长期努力研究，目前对维数 $n\le 16$ 时可以完全确定等角线数目的精确值。截止 2020 年，我们知道的部分维数较小时的等角线数目见如下的表 1 所示 [2]。

n	2	3	4	5	6	7-14	15	16
$k(n)$	3	6	6	10	16	28	36	40
n	17	18	19	20	21	22	23	…
$k(n)$	48-49	56-60	72-74	90-94	126	176	276	…

表 1. 维数 n 较小时的等角线数目

[1] Gerzon 的这个结果是在论文 [P.W.H. Lemmens and J.J. Seidel, Equiangular lines, Journal of Algebra, 24 (1973), 494-512. 中提到的 .

[2] 更加详细的信息请参见文献 [G.R.W. Greaves and P. Yatsyna, On equiangular lines in 17 dimensions and the characteristic polynomial of a seidel matrix, Mathematics of Computation, 88 (2019), 3041-3061 和 Greaves 等人后续的工作 .

另一个值得一提的是，在维数 $n = 7$ 时，Gerzon 给出的上界 28 也是紧的。这样的等角线的构造是通过考虑李群 E_7 的 56 维表示的加权向量给出的。更加直观的说，这时我们取的等角线对应于单位向量 $\frac{\sqrt{6}}{12}\,(1, 1, 1, 1, 1, 1, -3, -3)^T$ 的 28 个置换。由于这 28 个置换中每个向量的所有分量和为零，它们自然的处于一个 7 维欧式空间中。并且由任意两个不同向量的内积为 $\pm\frac{1}{3}$ 可知，这 28 条直线中任意两条的夹角均为 $\arccos\frac{1}{3}$。这样它们就代表了 7 维欧式空间的 28 条等角线。

目前所知道的等角线精确值的最大的维数可能是 $n = 23$ 时有 $k(23) = 276$。在维数较大时，上述的 Gerzon 与 de Caen 所得的上下界依然是目前所知的最好结果，即

$$\frac{2}{9} \le \limsup_{n\to\infty}\frac{k(n)}{n^2} \le \frac{1}{2}.$$

在 70 年代，Neumann 已经证明，若常数 t 不是奇数分之一的形式，则 n 维空间角度为 $arccos\ t$ 的等角线的数目最多为 $2n$。因此为了找更多的等角线，很多研究的兴趣都集中在夹角为 $\arccos t$ 的等角线，其中 $t=\frac{1}{2m+1}$（m 为正整数）。记 $F(n, t)$ 为 n 维空间上固定角 $\arccos t$ 的等角线的最大条数，则有 $k(n) = \max\{F(n, \frac{1}{2m+1})|m$ 为正整数 $\}$。因此确定固定角度 $\arccos t$ 的 n 维空间上等角线的最大条数 $F(n, t)$ 也是一个重要而且有趣的问题。这个固定角的等角线问题最近取得了突破性进展，Balla 等人 [3] 在 2018 年证明了对于充分大的 n，只要 $t \neq \frac{1}{3}$ 就有 $F(n, t) < 1.93n$. 之后 2019 年，Jiang 等人 [4] 对于充分大的 n 完全确定了 $F(n, t)$ 的值，即有 $F\left(n,\frac{1}{2m+1}\right)=\left\lfloor n+\frac{n-m-1}{m}\right\rfloor$ 对任意足够大的 n 都成立，且对于其它的 t 值他们也给出了 $F(n, t)$ 的精确估计。这些突破主要使用的是图论中的符号图和符号图矩阵特征值的工具。

在数学中的图论领域，一个图 $G = G(V, E)$ 是由顶点集 V 和顶点之间的连接关系即边集构成 $E \subseteq V\times V$。图的语言描述了一种自然的离散数学结构，它是分析计算机网络、神经网络、交通网络、社交网络等网络结构的有效数学模型，因此在自然科学的各个领域都有广泛应用。符号图是指每条边被赋予正号或者负号的图，它是一种更加一般化的图模型。对于一个符号图而言，如果每个圈上所有边符号的乘积都为正，则称这个符号图是平衡的。不带符号的普通图可以看作是平衡符号图的一种特例，即每条边都是正号的符号图。关于符号图的平衡性有三个基本问题：它是平衡的吗？它的最大的平衡边集包含多少条边？对于不平衡的符号图，必须至少删除多少个顶点来使得剩下的部分平衡？

[3] I. Balla, F. Dräxler, P. Keevash, and B. Sudakov, Equiangular lines and spherical codes in Euclidean space, Inventiones Mathematicae, 211 (2018), 179-212.

[4] Z. Jiang, J. Tidor, Y. Yao, S. Zhang, and Y. Zhao, Equiangular lines with a fixed angle, arXiv:1907.12466v3.annals of mathematics, available online