Newton's method 牛顿迭代法传奇史话

曾钟钢　丁 玖

传说三千五百年前，聪明的巴比伦人想出了一个计算平方根简单漂亮的窍门：如果一个正数比$\sqrt{A}$小一点，则A除以它就比$\sqrt{A}$大一点，这样它们的平均值就有希望更靠近$\sqrt{A}$。于是，先取$\sqrt{A}$的一个大致估计记为a，只需求a和$\frac{A}{a}$的平均，写成公式就是

$$b=\frac{1}{2}(a+\frac{A}{a})$$

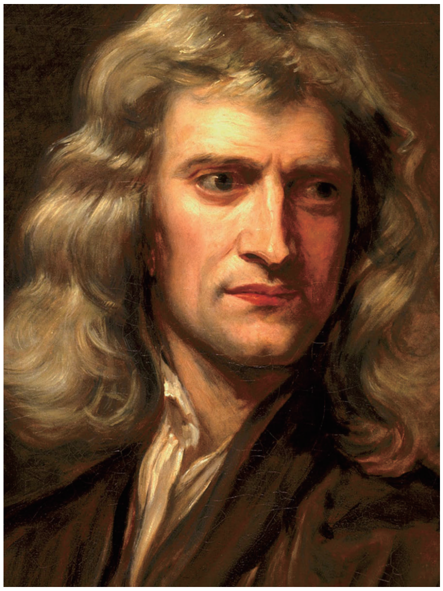
算出的b就是$\sqrt{A}$更精确的近似值 。

神奇的是，如果你的初始估计不是太差，比如猜到$\sqrt{2}\approx 1.4$作为a有两位数字精确，那么$b\approx 1.414$就有四位数字精确。用同样办法改进b得到$c\approx 1.4142136$的精确数字就有八位。每次计算精确数位翻一番！

猜不出初始近似怎么办呢？没关系，从任何非零正数a出发都可以。随意乱猜的结果无非是多算几步，很快就会进入精度加倍状态。这个方法流传至今成为经典传奇，叫做巴比伦方法。为什么说是个传奇？这是因为没有文字记载。直到公元 60 年古希腊的数学家 Hero of Alexandria(c.10-c.70) 对这个方法给出了有案可查的第一个明确的表述，所以巴比伦法也称为赫伦方法（Heron's method）。现在我们知道，本文主题牛顿迭代法最古老的源头来自四大文明之一巴比伦文明。

首次文字记载巴比伦方法的古希腊数学家 Hero of Alexandria

1. 牛顿迭代法



牛顿

牛顿的大名就无需介绍了。他以发现力学三大定律、万有引力定律和微积分跻身从古到今最伟大的科学家行列。牛顿无疑是有史以来最杰出的数学家之一。作为一个重大贡献，他率先发现的微积分可以上升到人类文明瑰宝的高度。所有的理工科大学生都应该知道赫赫有名的“牛顿法”，也称“牛顿迭代”或“牛顿近似”。自然科学家、应用和计算数学家及工程学家们一旦需要求解非线性方程和方程组，脑子里首先应该想到的就会是牛顿法。

什么是牛顿法呢？设想我们要求出一元非线性方程 $f(x) = 0$ 的解，比如说 $x - \cos x = 0$，这里 $f(x) = x - \cos x$。数学史上有个著名的阿贝尔不可能定理，说的是非线性方程一般来说是不可能保证找到精确解的，门都没有。所以我们需要所谓“数值方法”一步一步地逼近解，算到精度够了就行。假如 $f(x)$ 有导函数 $f'(x)$，牛顿法就是这样的迭代程式：先取一个初始点 x_0 作为解的近似，然后按下面的简单公式依次迭代：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0,1,2,\ldots \qquad (1)$$

就得到一个序列 $x_0, x_1, x_2, \cdots$。只要满足三个并不苛刻的条件：（i）函数 $f(x)$ 二次连续可导，（ii）在所求解 x_* 处导数非零，加上（iii）初始近似 x_0 足够接近 x_*，则这个序列将快速趋近 x_*，基本上是每一步精确数位加倍。因此，实际计算中大多三五步迭代就可以获得足够精确的近似解。读者可以很容易验证，巴比伦方法其实就是求解平方根方程 $x^2 - A = 0$ 的牛顿迭代。当然啦，巴比伦人不大可能知道“迭代”这个概念。

你要作科学计算和工程计算吗？几乎所有问题要么本身就是个方程，要么一定会在某个步骤需要解方程。作为解方程的基本通用算法，牛顿法是应用数学和计算数学最重要的算法之一。这个简单神速的算法冠以牛顿大名，真是牛顿发现的吗？这是个历史悠久又颇有争议的传奇故事，引出数学史上一个个如雷贯耳的名字。

2. 谁发现了牛顿法？

现在大家用的代数符号和表达式体系，创始人是法国人韦达（François

Viète, 1541-1603）。他的谋生职业是律师，还做过亨利三世和四世的王室智囊，挣足了钱给自己提供经费研究出版数学，除了代数，还是方程理论的大师。他计算能力超强，在欧洲首次算出十位精确圆周率值。韦达在十七世纪初提出了一个多项式方程求根的算法，每一次计算精度数位增加一位。用现在的话说叫线性收敛或一阶收敛 [1]。

代数鼻祖韦达

牛顿于 1664 年左右读到韦达的技巧 [2]，约 1669 年写入《分析论》（*De analysi*）。但这部书直至 1711 年由威尔士数学家琼斯（William Jones, 1675-1749）为他编辑出版。牛顿在书中改进了韦达思路，提出一个近似求解多项式方程的新方法。以三次方程 $x^3 - 2x - 5 = 0$ 为例。他首先注意到在 2 与 3 之间有个解（读者可以用介值定理验证），于是他把这个解写成 $x = 2 + p$，代入原方程化简后得到 p 的三次方程 $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$。当然，解这个新方程看起来跟老方程一样困难。但 p 的方程可以用上微积分的思路求解：因为 p 很小，它的平方和立方就更小，于是三次函数 $p^3 + 6p^2 + 10p - 1$ 可以用线性部分 $10p - 1$ 近似。解 $10p - 1 = 0$ 得到 $p \approx 0.1$。也就是 x 的近似从 2 到 2.1，精确数位翻倍。

然后，牛顿依法炮制，即令 $p = 0.1 + q$，代入 $0 = p^3 + 6p^2 + 10p - 1$：

$$
\begin{aligned}
0 &= (0.1 + q)^3 + 6(0.1 + q)^2 + 10(0.1 + q) - 1 \\
&= q^3 + 6.3q^2 + 11.23q + 0.061 \\
&\approx 11.23q + 0.061
\end{aligned}
$$

得到 $q \approx -0.0054$，也就是 $x = 2.1 + q \approx 2.0956$。再令 $q = -0.0054 + r$，同法得 $r \approx -0.00004852$。这样经过三步以后，牛顿找到原方程的一个 8 位精确的近似解

$$x = 2 + p + q + r \approx 2 + 0.1 - 0.0054 - 0.00004852 = \mathbf{2.09455147}$$

每算一步精确数位加倍！

[1] 韦达的算法解释起来很费功夫，有兴趣的读者可以参考 Tjalling J. Ypma, *Historical Development of the Newton-Raphson Method*, SIAM Review, 37, 531-551, 1995.

[2] P. Deuflhard. *A short history of Newton's method*, Documenta Math., Extra Volume ISMP. 25. 25-30. 2012.