巧合的秘密——恒等式

田汸泽寰

思考起源

巧合是一类常见的给人带来惊喜的事情或魔术效果，比如你刚好在大街上碰到了 10 年没见的老朋友，或者是魔术里刚好选了完全一样的扑克牌。在魔术中我们显然不能靠运气来做出效果，那些必然的巧合背后很多是某种数学性质在起作用，而这个数学性质我们叫它恒等式，是我们总结客观规律最重要的数学工具。有了这个工具，设计和理解魔术也会瞬间变得柳暗花明。

魔术欣赏

● 张数巧合

表演详情请扫码或访问以下链接观看：

张数巧合

视频链接：https://v.qq.com/x/page/o0820erha3y.html

操作释义

数牌（count）：扑克术语中也叫发牌（dealing），指一手以发牌姿势拿着扑克牌（一般为左手），另一只手从牌叠顶端一张一张发牌到桌子上并逐渐形成一个新的牌叠。

翻转（turn over）：将一张或一叠扑克牌从原本正面（背面）朝上的状态绕任意水平旋转轴旋转 180 度后变成相反的背面（正面）状态，有时和发牌操作同时进行，即把发出的牌叠进行翻转。

数学原理和模型

今天我们要应用的数学工具是恒等式，有海量的数学结论都是以“对任意的 x，都有 $\varphi(x)$ 成立”这样的恒成立形式来表达的。它代表一种数学或者物理等自然科学不变的规律，我们用这种数学工具来总结我们发现的知识。今天我们就用代数方程组来推导一个恒等式，来看看这一数学工具在魔术中的应用。

● 魔术来源

这个魔术源自伦敦玛丽女王学院出的《数学与魔术》系列中的一个作品，不过我一直觉得数学味太重还没达到一个魔术表演的包装标准。后来偶然看到一个算法招聘的智力题：有一叠扑克牌，已知有 m 张正面向上，背面向上的张数未知，现在在黑暗的环境里，允许随意翻转这些扑克牌，但不知道翻的是正面还是背面向上的。现在请你把牌叠分成两份，使得两份的牌叠正面向上的张数一样多。一开始我还真愣住了，这要是做到了，岂不是很好的魔术？而当我知道答案那一刻，也惊叹于这里内部结构的巧妙，并进一步改造成一个神奇的魔术，直到完成上面这个作品。

● 流程描述

1. 魔术师拿起一叠扑克牌，让观众切出一半以内的牌叠；
2. 让观众洗乱这个牌叠，并且一张一张发在桌上，一边发一边可以选择发的每一张翻或者不翻过来；
3. 再次洗乱后，魔术师拿起剩下的牌叠，拨牌，让观众喊停，选了一张，比如 8，于是从洗乱的牌叠顶部数了 8 张牌出来，把剩下的放入了牌盒里；
4. 魔术师说，刚才所有的一切都是随机发生的，但是有种神秘的巧合，牌盒里的牌和外面的牌会形成一种神奇的感应，比如他们背面向上的张数是一样多的。然后依次拨开两叠牌，发现背面向上的牌的张数真的一模一样！

● 准备工作

一副扑克牌，其中底部放一张 Ace，以及 2 到 10，一共 10 张牌，花色任意，排列顺序任意，不要看出任何规律为佳。其余牌顺序随意。

● 表演方法

这是个半自动化魔术，大部分的原理都是用数学模型建模以后用数学工具可以描述和求解的，但是对最核心的部分使用了魔术方法——强选。这无疑为原本可能还有一点脆弱和无聊的数学原理注入了一针强心剂。

下面是“流程描述”中，每个步骤对应的表演注意事项：

1. 给观众切牌之前可以简单洗牌，注意不要把底部的牌序设置洗乱了。另外，之所以切一半以内，是尽量让观众选的牌在 20 张左右，这样不会太少而效果不佳，也不会太多而数不过来，甚至造成表演失败。
2. 这个过程中魔术师需要秘密地观察一共有几张牌被翻过来了，因为没人知道接下来要发生什么，这个数牌的过程注意力也在观众身上，所以是可以做得很隐秘的。
3. 这时候，我们需要强选观众翻到正面张数的点数的牌。如果是 10 张以内，那就直接从预先设置的底牌中找到对应的数字就好了，如果超过 10 张（因为整叠牌不超过半叠，所以一般会在 20 张以内），那就需要把 10 和另一个数字牌一起拿出来做两次强选。最后，把牌放入反面向上的牌盒，然后再反过来放在桌子上，使得效果成立。
4. 最后就是揭晓谜底了，依次数出牌盒外和内的背面向上的张数即可。

数学原理

对于这个魔术，我们用的是代数方程组的数学工具，而构建这些等式用到的模型，连排列都没用上，仅仅是互补集合和全集的大小关系而已。

首先，观众选的牌张数，记为 l，是个未知数；然后观众选了 z 张牌正面向上，因为我们偷偷数了，所以是个已知数，但它是可以任意取值的。接着又数了 z 张牌出来，关键来了，这里一下产生了两个恒等式：

1. 首先数出来的是 z 张牌，构成一个大小为 z 的集合，这些牌显然有正有反，构成两个互补的子集，设正面和反面向上的牌叠张数为 m，x，有，$x+m=z$；
2. 另外，数出来和剩下的牌中，一共有 z 张牌正面向上，这个集合恰好被数牌这一操作给拆分成两个互补的子集，其中数出来那一叠的正面向上的集合就是上面大小为 m 的那个集合，剩下一叠中正面向上的集合大小，记作 y，有 $y+m=z$；

于是经过简单地恒等变形，可得 $x=z-m=y$，即 $x=y$ 对任意的 l，z，m，x，y 恒成立。

当然，目前，x 对应的集合还是牌盒外背面向上的牌，y 对应的是牌盒内正面向上的牌，但是因为我们把牌盒带着牌叠翻过来了，所以这个集合的性质变成了背面向上，也就是最后魔术里的神奇大结局。

大家可以看到，这里一共涉及了 5 个变量，l 是个无关变量，魔术中就是干扰观众破解的思路，数学题中就是干扰解题思路的；z 也是个变量，严格来讲其实是正面向上和发出的牌这两个大小相等集合的大小。因为数值相等，我们用同一个字母表示了，但是并不能抹去这本身是两个集合。只是通过手法构造了大小相等关系而已，而且这个大小的相等关系又正好是我们所需要的。如果推导再细一点，两个方程的 z 应该改成 z_1，z_2，并且添加 $z_1=z_2$ 的方程。m，x，