



与陶哲轩“共舞”的一个周末

丁玖

2019年11月15日，应我的师兄李弘九（Noah Rhee）教授的邀请，我从美国东南部的海滨小城飞到中西部的第七大城，在他任教的密苏里大学堪萨斯城校区数学与统计系做了一个《从统计观点看混沌》的数学演讲。我乘坐早晨6点的飞机，经停亚特兰大机场，换机再飞到那里。没有想到的是，在堪萨斯城度过的周末值得写这篇感想之作。

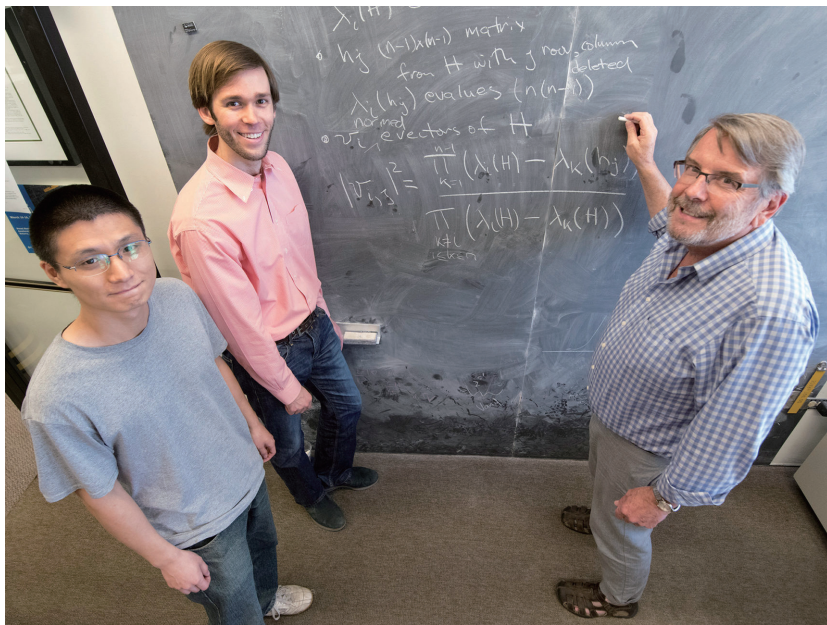
早晨5点，我已在起点机场候机，便习惯性地打开了微信，朋友圈里有人转发的一篇来自公众号《量子位》的文章标题一下子跳进我的眼框：3个搞物理的颠覆了数学常识，数学天才陶哲轩：我开始压根不相信。文章转述的是海外名刊 *Quantamagazine* 两天前登载的一篇博客内容，讲的是2019年夏季发生的一件事。

8月的一天，一直在加州大学洛杉矶校区教书的这名天才数学家收到三位陌生物理学家的一封电邮，称

“我们偶然发现了一个公式，如果这个公式是正确的，那么它就会在线性代数中一些最基本且重要的对象之间建立一种意想不到的关系。”

陶哲轩教授很纳闷：这么短、这么简单的东西，早就应该出现在教科书里了。这不可能是真的。但是他却相信了这个公式是新的，于是便把它证明了，这对不知证明了多少艰深数学定理，被认为是当今全世界最聪明的他，是手到擒来的小事一桩。十天后，他们四人就合写了一篇不到三页的论文，标题是 *Eigenvectors from Eigenvalues*（来自特征值的特征向量），其中的主要结果就是这三位物理学家发现的那个公式，文章并且用了两种方法证明之。

这个公式将埃尔米特矩阵的长度为1的特征向量的每一个分量的模平方，即与其共轭复数之积，用矩阵所有的特征值以及与这个分量的位置指标相对应的主子矩阵的所有特征值的某个简单代数关系表达出来，结果的确漂亮，属于“美的数学”。然而一般的线性代数教科书中却没有它的踪影，所以四名作



几乎颠覆了数学常识的三个物理学者

者都以为前人把发现这个美丽公式的荣誉留给了他们。

陶哲轩是数学界的超级巨星，他关于数学的一举一动都会引起媒体的骚动，就像他的数学博客那么吸引人一样。所以众人也以为他们发现了一个新的公式，有人甚至宣称“这一公式的理论价值在克莱姆法则之上。”克莱姆法则将非奇异线性代数方程组的解的各分量用一个商来表示，商的分母总是方程组的系数行列式，而分子则是用方程组的右端向量取代解的分量位置指标所确定的系数矩阵那个列所得到的新矩阵的行列式。

读完这篇报道，我随手将它转发到我的南大同学群。当我飞到亚特兰大机场后，又在朋友圈里看到了引起轰动的这篇数学文章。但让我一眼看到的是，文章的第一句竟然有个小小的英文笔误。

当天下午，我的一位大学同学就在群里转发了新消息：这个结果不是新的，北大数学教授徐树方在他 90 年代出版的一本关于矩阵计算的书中，关于实对称三对角矩阵，就给出了同样的结果。很快，其他关于同一公式的史实记录纷至沓来，一直追溯到 1968 年美国加州大学的一位线性代数教授汤普生（R. C. Thompson）及其弟子，以及其他人的发表之相同或等价的等式。到了第二天，陶哲轩等作者的说明也飘然而至，提供了有关这个结果的部分历史事实。在被发现的文章中，证明公式成立的基本假设似乎都没有超出埃尔米特矩阵的范畴。埃尔米特矩阵是其共轭转置等于它自己的一类矩阵。

一个小小的数学浪花，由于冲浪者的鼎鼎大名，通过快速的网络传播，汇成了一股股滔滔巨浪。这就是现代通讯技术的力量。

下午作完了学术报告，与对我演讲论题颇感兴趣的系主任交流片刻后，我待在师兄的办公室等待另有活动的他，于是在手机上开始阅读陶哲轩他们的文