我眼中的菲尔兹奖得主比尔卡

——兼谈极小模型纲领与 BAB 猜想

韩京俊

比尔卡获颁菲尔兹奖（图源：Marcos Arcoverde / ICM2018）

剑桥大学的教授比尔卡（Caucher Birkar）于 2018 年 8 月在巴西的国际数学家大会上获得了数学界的最高荣誉——菲尔兹奖，获奖工作包括对 BAB（Borisov-Alexeev-Borisov）猜想的证明（Fano 簇的有界性）以及在极小模型纲领（Minimal Model Program）中的贡献。意外的是，他的奖章在获奖半小时后即遭失窃，国际数学家大会组委会又重新为他颁发了一枚，他也因此成为历史上第一个被两次授予菲尔兹奖奖章的数学家。作为一个在两伊战争中走出来的“少数裔”获奖者，他的菲尔兹奖之路充满了荆棘。我和比尔卡教授有一定的接触，谨以此文来介绍这位数学家与他的获奖工作。

初“识”比尔卡

第一次听到比尔卡教授的名字，应该是在我博士一年级的时候。当时我开始学习代数几何不久，听说我们方向几年前有一篇很经典的文章，被誉为是双

有理几何、乃至代数几何近 20 年来最大的进展之一。这篇文章解决了极小模型纲领中一个重要的公开问题。出于好奇，我打印了文章，想一探究竟。

这篇文章简称 BCHM，是四位作者姓名首字母的缩写（Birkar-Cascini-Hacon-M^{c}Kernan）。除比尔卡教授外的另三位作者也都是非常出色的数学家。卡斯契尼（Paolo Cascini）是英国帝国理工学院的教授。哈孔（Christopher Hacon）是美国犹他大学的杰出（distinguished）教授，同时还是美国科学院与美国艺术与科学学院院士。麦基尔南（James M^{c}Kernan）是美国加州大学圣地亚哥分校的教授。BCHM 曾被授予美国数学会的穆尔奖（Moore Prize），哈孔和麦基尔南此前因为 BCHM 等工作获得过奖金额度为 300 万美元的数学突破奖（Breakthrough Prize in Mathematics）等殊荣。

刚打开这篇文章，我就被它的长度惊到了：全文长达 64 页！再仔细一看，为证明文章的主要定理，共需要证明 6 个看似毫无联系的辅助定理，这六个辅助定理的证明需要用数学归纳法进行互推，例如小于等于 $n-1$ 维的定理 D，小于等于 n 维的定理 B 以及小于等于 n 维的定理 C 可推出小于等于 n 维的定理 D。

The proofs of Theorem A, Theorem B, Theorem C, Theorem D, Theorem E and Theorem F proceed by induction:

- Theorem F_{n-1} implies Theorem A_n; see the main result of [9].
- Theorem E_{n-1} implies Theorem B_n; cf. (4.4).
- Theorem A_n and Theorem B_n imply Theorem C_n; cf. (5.6).
- Theorem D_{n-1}, Theorem B_n and Theorem C_n imply Theorem D_n; cf. (6.6).
- Theorem C_n and Theorem D_n imply Theorem E_n; cf. (7.3).
- Theorem C_n and Theorem D_n imply Theorem F_n; cf. (8.1).

“BCHM” 中复杂的定理互推（图源：论文原文）

这刷新了我对数学的认知。大家在高中都接触过数学归纳法，但如此复杂的归纳，让我不禁怀疑自己以前学的是“假的”数学。文章的证明用到了许多高深的数学，彼时处于一年级、仍在学教科书的我难以企及。但既然是我们领域最经典的文章之一，我暗下决心，一定要在博士阶段读懂它。

学习的道路并不是一帆风顺。在博士前两年学习了足够的基础知识后，在第三年我终于可以开始研读 BCHM。我曾天真的认为，即使每天读一页，两个多月也能读完 BCHM 了。但直到一整个学年结束，我才勉强领会 BCHM 证明中的技术细节。证明的高度抽象与复杂，以及对证明动机的不了解，曾一度使我陷入困境。在这期间，我还在网上观看了比尔卡讲解 BCHM 的系列讲座视频。这对我理解证明的帮助很大，也让我对比尔卡有了一种亲近感。

BCHM 中的数学——极小模型纲领

要解释清楚 BCHM 大概证明了一件什么事，就有必要先来介绍一下代数几何，特别是极小模型纲领。代数几何是一门研究多项式方程组解的几何性质的数学分支。我们一般用“代数簇”来指代多项式方程组的解。一般地，代数

簇的性质取决于变量的取值范围。例如研究代数簇 $X^n + Y^n = Z^n$，当 $n \geq 3$ 时，上述方程即为著名的费马大定理，是没有正整数解的。

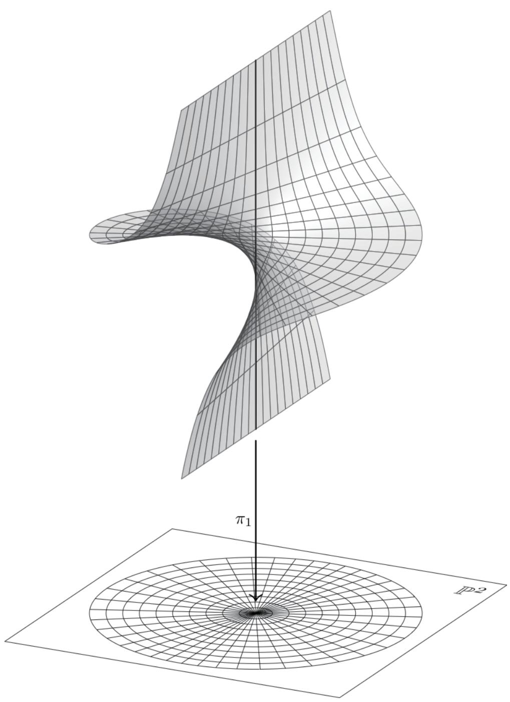
代数几何或者说复代数几何，主要研究变量取值为复数的多项式方程。代数基本定理告诉我们，一元 d 次多项式一定有 d 个复根，但未必有实根。因此研究方程的复根往往要比研究实根更容易。

数学上研究一类对象常用的手段是对这类对象进行分类，将有类似性质的对象归为同一类。代数几何的一个主要课题是将代数簇在双有理等价下进行分类，并在每一类中找出一个“最简单”的代表。

通俗地说，如果两个代数簇在绝大多处是一样的（除去一个闭子集），我们就称这两个代数簇是双有理等价的。例如，双曲线 $xy = 1$ 与 x 轴（$y = 0$）之间可建立如下对应：当 t 不等于 0 时，$(t, 1/t)$ 到 $(t, 0)$ 是一一对应的。因此该双曲线和 x 轴是双有理等价的，尽管定义它们的方程并不相同。作为一个练习，读者可思考抛物线与 x 轴是否是双有理等价的。

在双有理等价意义下，将一维的代数曲线进行分类比较容易，由曲线的亏格就能给出完整刻画。对于曲面，会出现一些新现象，如下图中的两个对象是双有理等价的。除去原点外，下图中的平面（plane）和其上的图形有一个一一对应关系，而原点的原像是一条直线（用加粗的黑线标出）。

我们称上面的图形是由平面 blow up 原点得到，或者说上面的图形 blow down 后可得到平面，显然 blow down 后得到的平面在几何上是更简单的对象。



平面上 blow up 原点

早在 20 世纪初，意大利代数几何学派就研究了曲面的双有理分类。他们证明了任何一个曲面都可以通过不停地进行 blow down 这种操作，最后得到一个“极小曲面”。这种“极小曲面”由局部弯曲程度相同（常曲率）的同一类几何对象拼接而成。几何上根据弯曲程度的不同，有三类基本的对象：Fano 簇（正曲率），Calabi-Yau 簇（平坦）和一般型簇（负曲率）。这三类几何对象中，三角形内角和分别大于 180 度、等于 180 度、小于 180 度，因此它们的几何性质有很大区别。

我们可以认为，曲面的双有理分类至此就完成了。要将曲面上的方法推广到高维，是不容易的。曲面上的 blow down 操作，从相交理论的角度看，每次操作都收缩了自交数为 -1 的曲线，