谈谈代数数论

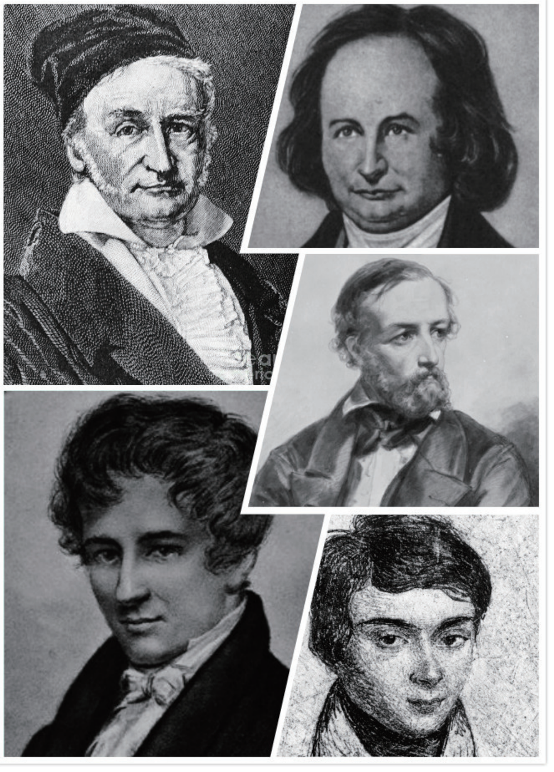
——代数数论百年历史回顾及分期初探

黎景辉

内容简述：我们把代数数论过去一百多年的历史作非常简单的描述，藉此探讨如何把整个发展作分期，和展望未来。我们不会在文中谈概念的详细定义和定理的证明，我们只打算谈一些主题和方法，希望对同学和科研管理员有点用，也许亦会让同行加以讨论。

第一部 序幕

本文简单地讲讲代数数论的历史，希望简单的讲就比较容易看见全貌，这样就方便把整个历史分期及对整个过程分析。至于文中所讨论的是否属于“代数数论”的范围？大家都会有不同的意见。例如：当$\mathbb{Z}$是整数环时，有人会认为研究$K_n(\mathbb{Z})$是代数拓扑学。有人会说$K_n(\mathbb{Q}_p(\sqrt{-d}))$的研究是属于代数数论，但如果$F$是域，$K_n(F)$是$K$理论。我不想为此花时间争议。不管是用代数、分析、几何、拓扑方法，我相信基本上什么是代数数论大家有相当共识的，还有一些题目我没有谈到而有专家认为是代数数论的范围。例如代数数论数值算法、代数数有理逼近、代数域上的解析数论、组合与概率代数数论、函数域上超越数论、不定方程与丢番图几何等，只好请大家行文畅述了。我国数学家在代数数论有非凡的成就，我认为需要专文介绍，这里没有谈到的，请大家原谅。当然要畅顺地阅读本文是需要一点代数知识的，比如你最少要知〔群、环、域〕这三件事。对学生来说，不必要看明白也可以看下去，因为这样你最少知道还有什么可以学的。



高斯 | 雅可比 / 狄利克雷
阿贝尔 | 伽罗瓦

注：本文首发于《数学通报》（2013年 / 第52卷第5期，1-5页；2013年 / 第52卷第6期，1-4页）。本刊转载时，黎景辉教授对多处内容进行了修改与补充。

1 奠基时代

我不打算为代数数论下个定义，因为这样便把代数数论限死了。我首先说说代数数论里几个重要的概念。

1. 我以$\mathbb{Q}$记有理数域。设 X 为变元，以$\mathbb{Q}(X)$ 记有理函数域。当 a 是一个复数时，以 a 代 X 从 $\mathbb{Q}(X)$ 得出的域记为$\mathbb{Q}(a)$。

2. 域扩张，就是一个域 E 包含另一个域 F。若 E 包含有理数域$\mathbb{Q}$我便称 E 为数域。最重要的数域是二次扩张$\mathbb{Q}(\sqrt{d})$，其中 d 是整数，$\sqrt{d}$ 不是有理数。

3. 设有域扩张 $E \supset F$, 考虑自同构 $\alpha : E \to E$ 满足条件：对所有 $x \in F$, 有 $\alpha(x) = x$。由所有这样的自同构 α 所组成的集合记作 $Aut(E/F)$。当 E/F 是 Galois 时，$Aut(E/F)$ 记为 $\mathrm{Gal}(E/F)$ 并称为 E/F 的伽罗瓦群。当 $\mathrm{Gal}(E/F)$ 为交换群时则称 E/F 为交换扩张。

4. 最简单的二次型便是多项式 $x^2+y^2+z^2$。

5. 在$\mathbb{Q}$上的椭圆曲线是指以 $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ 所定义的曲线，其中 g_2, g_3 为有理数并且 $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$。最著名的椭圆曲线是 $y^2 = x(x - a^\ell)(x - c^\ell)$，其中 ℓ 为≥ 5 的素数并要求有非零整数 a, b, c 满足费马方程 $a^\ell + b^\ell = c^\ell$。

6. 对实部大于 1 的复数 s 定义黎曼 zeta 函数为

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\text{是素数}} \frac{1}{1-p^{-s}},$$

这是数论里常见的 L 函数的祖先。注意这个等式是等价于整数的基本性质：任一整数必可写成素数乘积的唯一分解。

7. 平常的绝对值 $|x|$ 在有理数域$\mathbb{Q}$上定义一个度量。按此度量把$\mathbb{Q}$完备化便得实数域$\mathbb{R}$。我们说一个度量空间是完备是指这空间具有下述性质：空间中的任何柯西序列都收敛在该空间之内。现固定素数 p。设整数 a 有因子分解 $a = p^n d$，其中 d 与 p 没有公因子，则以 $v(a)$ 记 n。定义分数的 p- 绝对值

$$\left|\frac{a}{b}\right|_p = p^{v(b)-v(a)},$$

把有理数域$\mathbb{Q}$对p-绝对值完备化便得p-进数域$\mathbb{Q}_p$。

以下是代数数论的主要的奠基工作。

1. 高斯（Carl Friedrich Gauss, 1777-1855）：二次型，二次域扩张，二次互反律，带复乘的椭圆曲线
2. 阿贝尔（Niels Henrik Abel, 1802 -1829）：阿贝尔积分，五次方程没有一般根号解公式
3. 雅可比（Carl Jacob Jacobi, 1804-1851）：椭圆函数，θ 函数
4. 狄利克雷（Peter Dirichlet, 1805-1859）：L 函数，类数公式，算术序列中的素数
5. 库默尔（Ernst Kummer, 1810-1893）：交换扩张
6. 伽罗瓦（Évariste Galois, 1811-1832）：群论在域扩张的应用
7. 魏尔斯特拉斯（Karl Weierstrass, 1815-1897）：椭圆函数
8. 埃尔米特（Charles Hermite, 1822-1901）：复数域上的二次型理论
9. 埃森斯坦（F. G. M. Eisenstein, 1823-1852）：模形式，埃森斯坦级数
10. 克罗内克（Leopold Kronecker, 1823-1891）：有理数域的交换扩张
11. 戴德金（Richard Dedekind, 1831-1916）：ζ 函数，理想
12. 弗罗贝尼乌斯（Ferdinand Georg Frobenius, 1849-1917）：无分歧域扩张
13. 庞加莱（Henri Poincaré, 1854-1912）：模形式
14. 亨泽尔（Kurt Hensel, 1861-1941）：p- 进数

这些工作是在十九世纪完成的。一本很好快速介绍这些成果的书是塞尔（Jean-Pierre Serre）的《数论教程》，冯克勤译。一本讲 L 函数的经典著作是达文波特（Harold Davenport）的 *Multiplicative Number Theory*。

开始主题之前，我为大家介绍模形式。已知三角函数

$$f(x) = \sin 2\pi x$$

有以下性质：对任意整数 n 有

$$f(n + x) = f(x),$$

我们称整数 n 为函数 $f(x)$ 的周期。整数群 $\mathbb{Z}$ 为 $f(x)$ 的周期群。

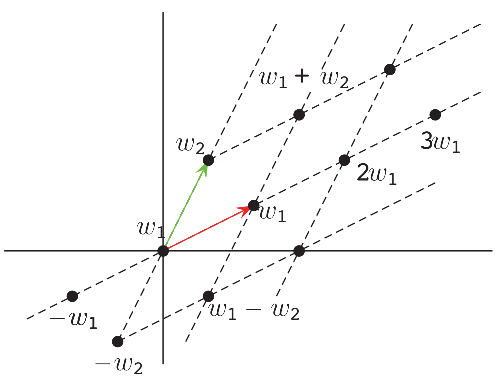
我们可以问：是否存在一些函数 f，它的周期群比整数群$\mathbb{Z}$更复杂。当然先问什么群比$\mathbb{Z}$复杂。第一个情形便是由整数对 (n, m) 所组成的群$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$。这个群的加法是这样定义的：

$$(n, m) + (n_1, m_1) = (n + n_1, m + m_1).$$

我们可以使用复数把这个群$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 推广一点。取两个复数 w_1, w_2 使得$\frac{w_1}{w_2}$不是实数。则复数集合

$$\Gamma = \{w = n_1w_1 + n_2w_2 : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$$

是复平面的一组格点。



上图表示了 Γ 是由 w_1 和 w_2 生成的

用复数的加法，Γ 便是一个群。Γ 实际上是与$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 同构的。

现在我们可以问：是否存在复变函数 $f(z)$ 使得 Γ 是 $f(z)$ 的周期群？即是说，对任意 $w \in \Gamma$，以下公式成立：

$$f(w + z) = f(z).$$

这样的函数 $f(z)$ 我们称为椭圆函数。

例子：已给群 Γ，则我们用无穷级数

$$f(z) = \sum_{w \in \Gamma} \frac{1}{(z-w)^3}$$

所定义的 $f(z)$ 是一个椭圆函数。

我们要指出$\mathbb{Z}$和$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$都是交换群。最简单的非交换群是 $SL_2(\mathbb{Z})$，它的元素是 2×2 矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

其中 a, b, c, d 是整数，并且行列式 $ad - bc = 1$，这是用矩阵乘法来定义的一个非交换群。

我们以 H 记上半复平面：$H = \{z = x + iy : y > 0\}$。若 $z \in H$，

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}),$$

则设

$$\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

如此我们说 $SL_2(\mathbb{Z})$ 作用在 H 上。

我们可以问：是否存在函数 $f(z)$ 在 $SL_2(\mathbb{Z})$ 这个作用下不变，即是说

$$f(\gamma(z)) = f(z).$$

在 $SL_2(\mathbb{Z})$ 里有元素

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 n 是任意整数，这时

$$\gamma(z) = \frac{z+n}{0z+1} = z + n,$$

于是对所有 $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ 成立的条件

$$f(\gamma(z)) = f(z)$$

是包括要求

$$f(z + n) = f(z),$$

即是包括要求整数群$\mathbb{Z}$是 f 的周期，从这个角度来看，我们所寻求满足条件

$$f(\gamma(z)) = f(z)$$

的函数 $f(z)$ 是三角函数的推广。但是，是否有这样的函数呢？

引进符号：若

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

则设 $j(\gamma, z) = cz + d$。因为几何的考量我们把条件

$$f(\gamma(z)) = f(z)$$

推广一点。固定一整数 $k \geq 0$ 。我们考虑定义在上半复平面 H 上的解析函数 $f(z)$，并要求对任意 $\gamma \in \Gamma$，以下等式成立

$$j(\gamma, z)^{-k} f(\gamma(z)) = f(z).$$

我们称这样的 $f(z)$ 为模形式。例子：设 k 为大于等于 4 的偶数，由以下埃森斯坦级数所定义的函数 $G_k(z)$ 为模形式：

$$G_k(z) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} (mz+n)^{-k}$$

在和中 $(m, n) \neq (0, 0)$。

在二十世纪的代数数论里模形式扮演一个完全意想不到的角色！我介绍一本关于模形式的书——Diamond & Shurman, *A First Course in Modular Forms*.

第二部　主题

以下我把二十世纪的代数数论分为五波来讲。

1. 交换类域论
2. 岩泽理论
3. 朗兰兹对应
4. 格罗滕迪克代数几何学在代数数论的应用
5. 同伦代数几何学在代数数论的应用

希尔伯特
高木贞治
阿廷
谢瓦莱
塞尔

2 第一波

奠基之后的第一波是从十九世纪末到二十世中叶，由下面诸位开拓：

1. 希尔伯特（David Hilbert, 1862-1943）
2. 高木贞治（Takagi, 1875-1960）
3. 阿廷（Emil Artin, 1898-1962）
4. 谢瓦莱（Claude Chevalley，1909-1984，1941 年柯尔奖）
5. 中山正（Nakayama）
6. 泰特（John Tate, 1956 年柯尔奖 , 2010 年阿贝尔奖）

7. 塞尔（1954 年菲尔兹奖，2003 年阿贝尔奖）。后者完成了交换扩张的伽罗瓦群的表示之上同调理论，即交换类域论。

好的参考书有下面的几本：

1. 高木贞治，代数的整数论，岩波书店（等待中文版）；
2. 岩泽健吉，局部类域论，冯克勤译，科学出版社；
3. 塞尔，*Local Field*；
4. 阿廷与泰特合著，*Class Field Theory*。

类域论的一个核心定理是互反律。高斯的二次互反律是互反律的鼻祖。让我们用拓扑群的语言介绍交换互反律。设 G 为拓扑群，由所有连续同态 $G\to\mathbb{C}^\times$ 所组成的集合记为 G^*。设 F 为数域，F^{ab} 为 F 的最大交换扩张，$\mathbb{A}^\times$ 为 F 的 idele 群，则交换互反律是指存在单同态

$$\rho:\ (\mathrm{Gal}(F^{ab}/F))^* \hookrightarrow (\mathbb{A}^\times/F^\times)^*$$

满足 L 函数条件

$$L_F^{Artin}(\chi,s)=L_F^{Hecke}(\rho(\chi),s).$$

在这里应推介高维局部域的互反律。这方面最早的工作是加藤和也（Kazuya Kato）的硕士论文[1]以及参考文献 [2]。

岩泽健吉 | 马祖尔
怀尔斯

3 第二波

我想先说什么是类数。设有数域 K。则 K 的分式理想以乘法为群 I。K 的每一个非零元生成一个主理想，以 P 记由主理想所组成的群。K 的理想类群 C_K 是指商群 I/P。称 C_K 的元素个数为 K 的类数，记作 h_K。域 K 的元素有唯一素元乘积分解的充要条件是 $h_K=1$。所以我们说 h_K 是数域 K 的一个重要算术参数。设 p 为素数，ζ_p 为 p 次单位原根。以 h_p 记 $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 的最大实子域的类数。Vandiver 猜想：p 不除尽 h_p；这是代数数论的一个重要的猜想。

岩泽健吉（Iwasawa Kenkichi, 1917-1998, 1962 年柯尔奖）二十世纪中叶岩泽提出传统类域论之外的一个新方向——交换岩泽理论（*On the Γ extensions of algebraic number fields*, Bull. AMS 65 (1959) 183-226）。岩泽健吉是弥永昌吉的学生，弥永昌吉（Shokichi Iyanaga）是高木贞治的学生，高木贞治是希尔伯特的学生。

考虑下述例子：取素数 $p\neq 2$，研究以下数域所组成的塔：

$$K_0\subset K_1\subset\cdots\subset K_n\subset\ \cdots\ \subset K_\infty=\bigcup K_n,$$

其中 $\mathrm{Gal}(K_n/K_0)\cong\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. 则

$$\mathrm{Gal}(K_\infty/K_0)=\lim_{n\to\infty}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})=\mathbb{Z}_p,$$

常称 K_∞/K_0 为 $\mathbb{Z}_p$ 扩张。

岩泽认为：当代数数论中某些数域所成的塔的伽罗瓦群同构于 p 进整数 $\mathbb{Z}_p$ 的加法群的时候，岩泽建议把这些数域所成的塔的理想类群（class group）看作 $\mathbb{Z}_p$ 模研究。理想类群 $\mathbb{Z}_p$ 模的特征理想可以用久保田富雄（Kubota Tomio）和里奥博特（Heinrich-Wolfgang Leopoldt）在 1960 年定义的 p 进 L- 函数的特殊值算出——“岩泽主猜想”。这个猜想在有理