电影中的数学

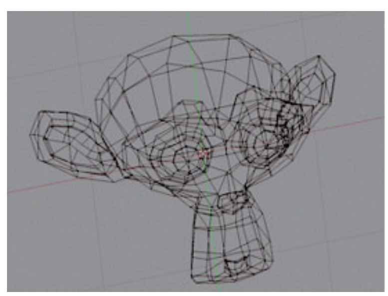
Joan Lasenby／文　袁晓明／译

我们都曾经对电影里呈现出来的一些电脑制作的精美画面惊叹不已，可很多人不知道的是，如果没有数学，我们就无法看到诸如《侏罗纪公园》里的恐龙和《指环王》里的奇景，尤其是咕噜姆（Gollum）的精彩表演。

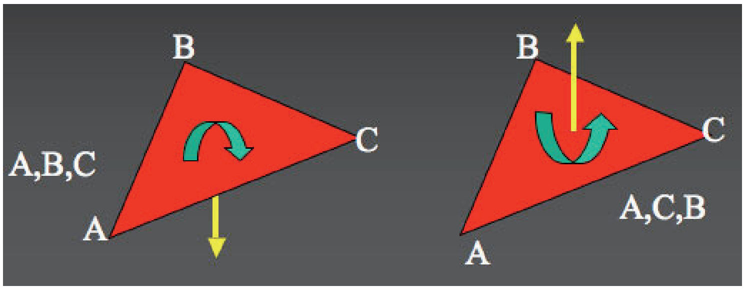
这些令人啧啧称奇的画面是怎么做出来的呢？答案是计算机图形学和计算机视觉学。本文将简单讨论一下一部电影是如何在数学的帮助下制作完成的。首先，我们将创建电影中所展示的世界；然后，再将其赋予生命力。

场景设置

先用诸如三角形等简单多边形构建出目标的丝网状主体轮廓



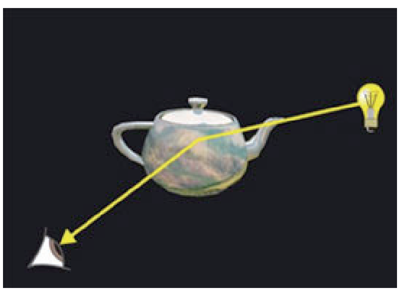
使用电脑制作一部电影的第一步是创造电影故事的人物以及这些人物所处的环境。这些目标都是用一些相连的多边形（通常是三角形）组成的曲面来表示。电脑要将每一个三角形的顶点记录下来。而且非常重要的一点是，电脑需要知道三角形的哪一面将用来表示目标或角色的外部。注意，一个三角形的外部是可以由右手旋转法则唯一确定的。这里右手旋转法则的意思是指我们的右手只有唯一的一个方式可以顺着



根据右手旋转法则，(A, B, C）的外法向与（A, C, B）的外法向方向相反

一个三角形的给定的顶点顺序握紧拳头。这时候大拇指将指向三角形的一面，而这一面我们就定义为三角形的外部。读者可以试一下上面这个简单的例子。你可以发现三角形(A, B, C)的外部方向(这被称为**外法线**)正好与三角形 (A, C, B) 的外部方向相反。

既然我们用三角形组成的丝网来表示一个目标的表面，那么接下来我们就应该对每个三角形着色了。其中很重要的一点是我们需要准确地描述我们所模仿的场景的光照。这通常是使用一种被称为光线追踪的方法完成。从我们的视点出发，我们朝着目标反向追踪那些光线，并且让它们从目标身上再反射出去。如果从我们眼中发出的光线经由一个小平面（那些丝网三角形中的一个）反射出去并与光源相交，我们就给这个小平面涂上亮色，从而使它看上去就像被光源照亮。如果反射的光线不能与光源交汇，这个小平面就着上更暗的颜色。



从我们的视角出发，追踪一束光线至一个小平面。这束光线会反射出去并与光源相交吗？

为了通过光线反向追踪到一个特定的小平面，我们需要用数学知识来表示一个目标的表面，并且需要求解一些涉及到光线和这个小平面所确定的二维平面的几何方程。这时候**向量**的概念就很重要了。对我们假设的场景，可以建立一个以视点为原点(即(0, 0, 0）这一点）的三维坐标系统。一个向量 $v = (a, b, c)$ 表示的是一个从原点出发的矢量，其中在各个坐标轴上的坐标值分别是 a, b 和 c。我们可以将向量 v 乘以一个常数。比如说，v 乘以 2，我们得到的新向量定义为

$$2v = 2(a, b, c) = (2a, 2b, 2c).$$

因此，$2v$ 是一个与 v 同方向的，但长度是 v 两倍的向量。

现在我们看一下 λv 这个表达式，其中 λ 是一个变量。也就是说，可以是任意实数。由于此时长度是个变量了，这个表达式也就仅仅能表示一个确定的方向，而无法表示一个有确定长度的矢量。换句话说，这个表达式表示了包含向量 v 的整条线。它表示了一条与 v 同样方向的从原点出发的直线，或者说从我们视点出发的光线。

由三角形小平面确定的二维平面可以由三条信息来描述：一个顶点（记为 a_1）的位置，以及表示从 a_1 到 a_2 和 a_3 这两条直线的向量。

我们列出两类表达式：即从视点出发的光线方程以及三角形小平面确定的二维平

面方程。为确定一条光线与一个小平面是否相交以及相交的位置，并计算反射光线方程，我们需要解决涉及如下两类表达式的方程。

光线方程：$r = \lambda v$，其中 λ 是一个实数，v 是一个向量。

定点是 a_1，a_2 和 a_3 的三角形确定的平面方程：

$$\lambda = a_1 + \mu_1(a_2 - a_1) + \mu_2(a_3 - a_1).$$

Doom 3 和 Neverwinter nights 等电脑游戏需要动态光照

通过光线追踪技术，我们可以制作出很逼真的场景。但这个过程非常耗时。如果用电脑来制作电影，这或许不是什么大问题。但当我们需要实时的场景光照变化时，如电脑游戏制作，就显得力不从心了。对于诸如阴影、散焦（caustics）、多重反射等更复杂的现象，动态地建立数学模型来刻画这些情节是不容易的。这时候，更复杂的数学理论，比如预计算辐射传输（precomputed radiance transfer）和光能传输（radiosity），就有了用武之地。

我们需要的只是一点想象力

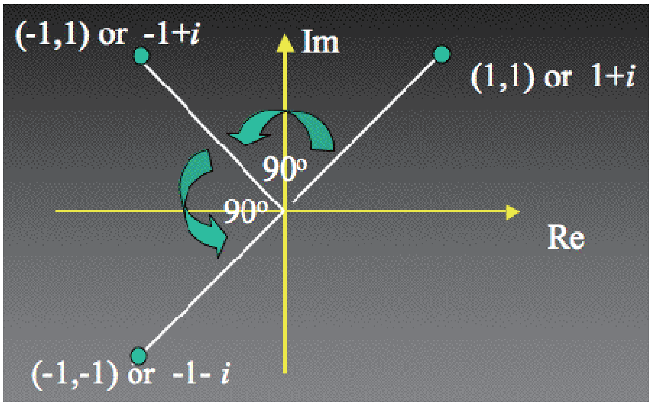
场景的设置和光照都准备好了，等导演一喊“开拍”，我们的人物就要动起来了。现在我们不妨审视一下那些能赋予画面生命力的数学。

一个目标需要完成的最基本的动作就是绕着一个给定的轴旋转一个给定的角度。坐标几何学为我们提供了工具，使得我们可以准确地计算目标旋转后的每一个点的位置，而重要的是，这一工具十分地快速有效。

为了理解这一工具，我们还是先补充一点数学知识。我们知道 25 这个数有两个平方根，即 $+5$ 和 -5，因为 $(+5)^2 = (-5)^2 = 25$。但是 -25 的平方根又是多少呢？为了求解负数的平方根，数学家定义了一个新的数。这个数用 i 来表示，并且 $i^2 = -1$。这样，因为 $(\pm 5i)^2 = 25i^2 = -25$，所以我们可以得到 $\sqrt{-25} = \pm 5i$。

由于 i 的引入，类似于 $x^2 = -1$ 这样的方程也可以求解了。事实上，形式上写成 $z = x + iy$ 这样的**复数**是数学中非常重要的一个工具，尽管历史上曾经有很多人不喜欢这个想象出来的数。

业余数学家让 - 罗贝尔 • 阿尔冈（Jean-Robert Argand）在 1806 年最先给出了复数和 i 这个数的几何解释。阿尔冈将复数与二维平面中的点联系起来了：即复数的实数部分与虚数部分分别由两个坐标轴来表示。比如，$1 + i$ 这个复数对应到 $(1, 1)$ 这个



复数的乘法有几何解释——旋转

点。一般的情形是，$a+bi$ 这个复数对应 (a, b) 这个点。

阿尔冈还意识到复数的乘法也有一个几何描述：旋转。我们可以看一下 (1, 1) 这个点表示的复数 $1+i$ 如果乘以 i 会得到什么结果：

$$i(1+i)=i-1=-1+i,$$

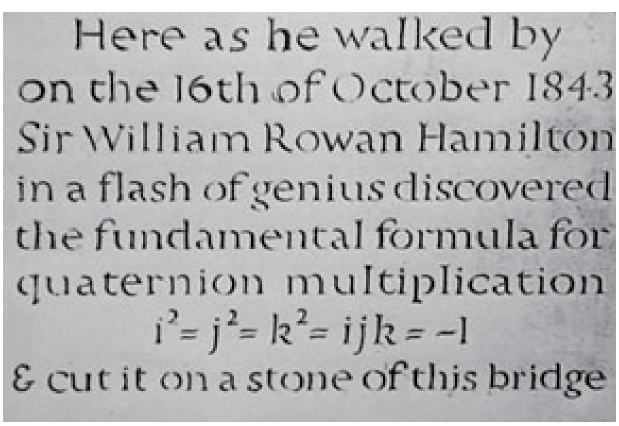
即得到了 $(-1, 1)$ 这个点，也就是说由原来的点旋转 90 度得到的点。再次乘以 i，我们得到：

$$i(-1+i)=-i-1=-1-i,$$

即得到（$-1, -1$）这个点，也就是说又旋转了 90 度。用数 i 去做乘法得到的效果是旋转 90 度！事实上，不仅仅是 90 这个角度，任何的旋转角度都可以通过乘以某一个复数来实现。

3D 画面

数学家汉密尔顿（Sir William Rowan Hamilton）可能是都柏林三一学院（Trinity College Dublin）最有名的校友。他在人生的最后二十年一直致力于找到一个类似二维空间里的复数那样的方式来表示三维空间的旋转。



汉密尔顿产生四元数灵感时经过的布鲁姆（Broom）桥上的纪念牌匾