竹里馆听书声

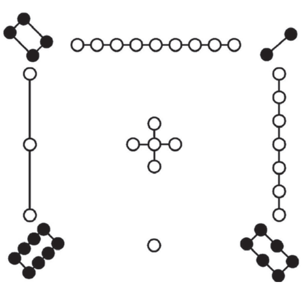
——一些幻方例证

柳形上

在华师大的数学文化课上，作过“幻方”这一主题的讲座。可当我无意间阅读到最近一期的《数学文化》杂志（2013 年第 3 期）上数学烟云篇关于幻方的数学与人文的故事的介绍时，还是不由得惊讶：原来幻方的天地比我想象中的还要精彩……是的，这一小品文缘自那一板块中的两篇精美之文：欧阳顺湘先生的《谷歌数学涂鸦赏析》，方开泰教授和郑妍珣的《数学与文化交融的奇迹——幻方》。本文的内容或可看作是幻方的七彩故事的一点点注释与补充，其主题在于分享如下的 3 个幻方例证所蕴含的一个奇妙的性质。

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 19 & 25 & 15 & 2 \\ 20 & 10 & 5 & 18 & 12 \\ 3 & 17 & 13 & 9 & 23 \\ 14 & 8 & 21 & 16 & 6 \\ 24 & 11 & 1 & 7 & 22 \end{bmatrix}.$$

这 3 个例证的前两个是我们相识相知的，它们分别是神奇的洛书和出现在德国画家丢勒（Albrecht Duerer, 1471-1528）著名的铜版雕刻画《忧郁者》上的幻方。关于这两个幻方多彩的人文故事不妨多多参考上面提到的《谷歌数学涂鸦赏析》和《数学与文化交融的奇迹——幻方》两篇美文 [1]。



洛书

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

《忧郁者》和其中的幻方

而例证 3 则来自吴鹤龄先生所著的《幻方及其他——娱乐数学经典名题》一书，据说这个幻方中掩映着南宋数学家杨辉的哲思。之所以在此收藏作为一个例证，或许只是个人的一点偏爱：在这个 5 阶的幻方中，其右下角的两个数字——7 和 22 让我们联想到伟大的阿基米德关于 π 的一则逼近——$\frac{22}{7}=3.14\cdots\cdots$

若把矩阵和其对应的方阵看作是一样的，并记上面的矩阵为 M，则我们可以有如下的数学故事：

定理 1. 对于形而上的 3 个幻方 M，其任一奇数次幂 M^{2k+1} 也是一幻方。

这里矩阵幂中的乘法是代数学中矩阵的经典乘法。这一例证，当可在高等代数学的教学中为我们大一的新生们架起一座数学与人文之桥。

为简洁起见，我们只对

$$M=\begin{bmatrix}4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\end{bmatrix}$$

的情形给出详证，其哲思可延伸到其它的两个例证。在证明之前让我们先来看看相关的一些特例：

$$M^3=\begin{bmatrix}4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1149&1029&1197\\1173&1125&1077\\1053&1221&1101\end{bmatrix}.$$

这是一个幻方常数是 $3375=15^3$ 的幻方。再看

$$M^5=\begin{bmatrix}4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\end{bmatrix}^5=\begin{bmatrix}252549&255429&251397\\251973&253125&254277\\254853&250821&253701\end{bmatrix}.$$

这也是一个幻方：其幻方常数是 $759375=15^5$。

往下我们将借助于数学归纳法来证明如下的结论：

洛书 M 的任一奇数次方，即 M^{2k+1}，也是幻方，且其幻方常数为 15^{2k+1}.

证明：（i）我们先可证明 M^{2k} 具有下面的形式——

$$M^{2k}=\begin{bmatrix}c_k&d_k&d_k\\d_k&c_k&d_k\\d_k&d_k&c_k\end{bmatrix}.$$

其证明之旅是这样的：

(i1) $k=1$ 的情形：$M^2=\begin{bmatrix}59&83&83\\83&59&83\\83&83&59\end{bmatrix}$，显然其具有上面的形式$\begin{bmatrix}c_1&d_1&d_1\\d_1&c_1&d_1\\d_1&d_1&c_1\end{bmatrix}$.

(i2) 假设 M^{2k} 具有形式

$$M^{2k}=\begin{bmatrix}c_k&d_k&d_k\\d_k&c_k&d_k\\d_k&d_k&c_k\end{bmatrix},$$

则进而通过 $M^{2k+2}=M^{2k}\cdot M^2$ 可以得到

$$M^{2k+2}=\begin{bmatrix}c_k&d_k&d_k\\d_k&c_k&d_k\\d_k&d_k&c_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}59&83&83\\83&59&83\\83&83&59\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{k+1}&d_{k_{k+1}}&d_{k_{k+1}}\\d_{k_{k+1}}&c_{k_{k+1}}&d_{k_{k+1}}\\d_{k_{k+1}}&d_{k_{k+1}}&c_{k_{k+1}}\end{bmatrix},$$

其中 $c_{k+1}=59c_k+166d_k$，$d_{k+1}=83c_k+142d_k$. 这就证明了 M^{2k} 时的结论。

（ii）进而可知有

$$M^{2k+1}=M^{2k}\cdot\begin{bmatrix}4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_k&d_k&d_k\\d_k&c_k&d_k\\d_k&d_k&c_k\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4c_k+11d_k&9c_k+6d_k&2c_k+13d_k\\3c_k+12d_k&5c_k+10d_k&7c_k+8d_k\\8c_k+7d_k&c_k+14d_k&6c_k+9d_k\end{bmatrix}.$$

（iii）经由此，不难看到 M^{2k+1} 也是幻方，其幻方常数为

$$15c_k+30d_k=15(c_k+2d_k)=15\cdot15^2\cdot(c_{k-1}+2d_{k-1})=\cdots=15^{2k+1}。$$

这就证明了本文开始给出的第一个幻方，其奇数次幂也是一个幻方。文章开头给出的另两种情形也满足这个结论，并且其偶数次幂具有如下的形式：

$$M^{2k}=\begin{bmatrix}c_{1,k}&c_{2,k}&c_{3,k}&c_{4,k}\\c_{3,k}&c_{5,k}&c_{6,k}&c_{2,k}\\c_{2,k}&c_{6,k}&c_{5,k}&c_{3,k}\\c_{4,k}&c_{3,k}&c_{2,k}&c_{1,k}\end{bmatrix},\quad M^{2k}=\begin{bmatrix}c_{1,k}&c_{2,k}&c_{3,k}&c_{4,k}&c_{5,k}\\c_{6,k}&c_{7,k}&c_{8,k}&c_{9,k}&c_{10,k}\\c_{11,k}&c_{12,k}&c_{13,k}&c_{12,k}&c_{11,k}\\c_{10,k}&c_{9,k}&c_{8,k}&c_{7,k}&c_{6,k}\\c_{5,k}&c_{4,k}&c_{3,k}&c_{2,k}&c_{1,k}\end{bmatrix}.$$

注释的画阁

关于洛书的这个奇妙特性最初是在柯利弗德 • 皮寇弗（Clifford A. Pickover）的书[5]上看到的，当时觉得：呵，神奇！人文与数学竟然可以这样遇见！然后在其后的一些时日里就想来证明这一数学故事，以及寻找在 4 阶乃至更高阶的幻方中相关的拓广和例证。

前几天围绕上面的例证给数学系的一些同学作了一个相约幻方的小讲座，课后的一个简单的问卷表明，绝大多数的同学在此之前对幻方的知识知道并不多。在分享这样的一段数学与人文的故事后，他们笔下最多的是“神奇”这两字：

这个发现很奇妙，只是不知道其中的数学原理。

我亲自在草稿纸上又算了一遍，觉得这个很神奇！这里当有更有意思的数学故事。

幻方和矩阵都像装有巧克力的纸盒，可以填充“数字的巧克力”，每一个对数学感兴趣的数学迷可以经由反复试验来捕捉和收藏在这其中的巧克力密码……

幻方原来和数字之间有着这样的奇妙关系，不要小看我们平时一直在做的加减乘除的数字，其中蕴含着无穷的秘密和神奇 。

古代数学若有现代数学的“翅膀”，当可散发出更加迷人的色彩……古人所经历的数学美景，是我们后人无可企及的。数学的世界真是一个奇妙的乐园。

神奇。因为有很多幻方在某一次幂时发现它不再是幻方。

话题 1：一般说来，一个幻方的偶数次幂不见得是幻方，比如上面例证中的三个幻方的 2 次幂都不是幻方：

$$\begin{bmatrix}59&83&83\\83&59&83\\83&83&59\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}341&285&261&269\\261&301&309&285\\285&309&301&261\\269&261&285&341\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}729&833&837&881&945\\835&841&1005&897&647\\1069&773&541&773&1069\\647&897&1005&841&835\\945&881&837&833&729\end{bmatrix}.$$