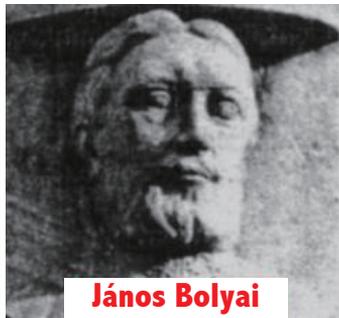
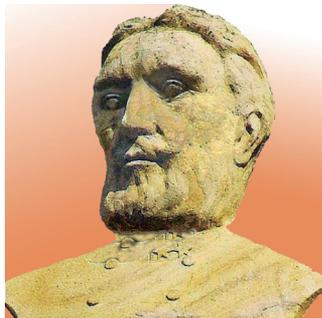




鲍耶与非欧几何

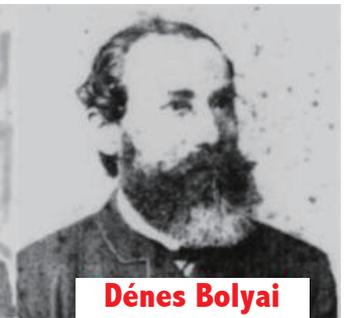
张小平 刺克



János Bolyai



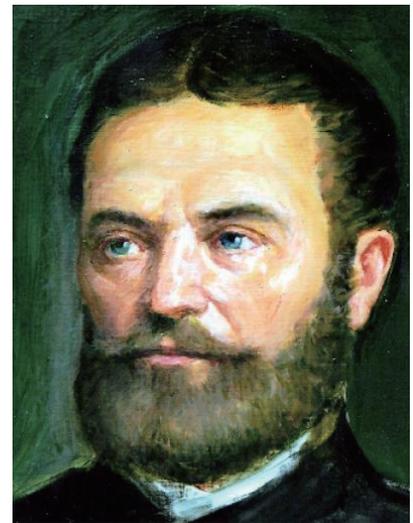
Computer



Dénes Bolyai

1	
2	3
	4

运气不佳的雅诺什·鲍耶 (János Bolyai, 在英文中有时也被称为 John Bolyai, 即约翰·鲍耶——笔者注) 数百年来给人们的印象一直是这副样子 (图片 1)。不过在美国数学会会刊 *Notices* 2011 年的一篇文章《鲍耶的真实面目》(*Real Face of János Bolyai*) 中, 通过计算机结合目前留下的唯一一尊雅诺什·鲍耶的雕像 (图片 2) 以及他的儿子丹尼斯·鲍耶 (Dénes Bolyai) 的照片, 生成了一幅全新的鲍耶图像 (图片 3)。画家弗朗西斯·马科斯 (Ferenc Márkos) 在此基础上于 2012 年重新创作了数学家雅诺什·鲍耶的油画 (图片 4), 目前这幅油画已经成为维基百科中雅诺什·鲍耶的“标准像”。不过所有这些雕像、照片、油画仍然和真正的鲍耶相去甚远。



提起匈牙利数学家, 您可能最先想到的是数学史上最多产的保罗·爱多士 (Paul Erdős); 提起非欧几何, 您可能最先想到的是罗巴切夫斯基 (Nikolas Lobachevsky) 和黎曼 (Georg Riemann)。那如果取交集呢? 这不是一个空集, 但却只有一个元素, 就是本文的主人公——雅诺什·鲍耶 (János Bolyai), 这位匈牙利数学家和罗巴切夫斯基几乎同时独立地创建了非欧几何中的双曲几何。对于非欧几何这个挑战经典的成果, 它的产生必定不会是一帆风顺, 鲍耶也遇到了种种非议, 甚至还有父亲的反对, 今天就让我们带您走近这位数学家, 看看他的生平和非欧几何在他手中诞生的过程。

欧氏几何

所谓非欧几何就是非欧几里得几何的简称，要了解非欧几何，我们还得从欧几里得几何，即欧氏几何，谈起。

欧氏几何是欧几里得于公元前3世纪创立的。欧几里得的《几何原本》是最早用公理化方法建立演绎数学体系的典范，是世界上流传最广、影响最大的一部数学经典之作。他精心选择了五个公理和五个公设，经过严密地逻辑推理，导出了欧氏几何的全部理论。这个理论所确立的公理化思想是数学的灵魂。所谓公理或公设，指的是不需要证明而加以承认的命题，它具有“不证自明”的特征。

如果说欧氏几何是一块美玉，那么这块美玉上有一处微瑕，就是第五公设。这条公设是指：

在同一平面内，如果一条线段与两条直线相交，在某一侧的内角和小于两直角和，那么这两条直线在不断延伸后，会在内角和小于两直角和的一侧相交。

首先，数学家们认为这条公设表述得过于复杂，根本不具备“不证自明”的特征，而且《几何原本》直到第29个命题的证明中才用到它。于是，数学家们自然就想用一种新的思路去处理它。这首先就要解决一个问题，第五公设相对于其它的公设是否是一个独立的命题。如果是的话，就很简单了，只须用一个简明的等价命题去替代它。其次，数学家们也质疑它的独立性，总想利用其它几个公理和公设直接证明它，使它成为一个定理。就为这样一个看似简单的问题，数学家们竟然忙碌了两千多年，在证明它是否具有独立性方面没有取得任何实质性进展。不过在这个过程中，数学家们倒是发现了与第五公设等价的许多命题。其中最简明的一个是普罗克勒斯（Proclus, 410-485）提出的：

在同一平面内，过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行。

由于数学家们难以撼动《几何原本》的理论，一批哲学家和数学家对欧几里得的几何就表示出了绝对的信心。1736年以后，从数学家克吕格尔（G. S. Kerügel）开始，就陆续有数学家和哲学家公开宣布，欧几里得几何的第五公设相对于其它公设是独立的，是不能被证明的。康德（Immanuel Kant）认为，欧几里得几何揭示的是“先天的、唯一的现实空间的概念”。哲学家黑格尔（G. W. F. Hegel）更加认为：欧几里得几何体系已经相当完备，不可能取得进一步的实质性进展了。

然而数学发展的历史总是让人无法捉摸。就在数学家和哲学家们忙于证明第五公设而一无所获时，有人用下面



罗巴切夫斯基（1792-1856）

的两个命题代替第五公设产生了不同于欧几里得理论的几何学，也就是非欧几何。

- (1) 在同一平面内，过直线外一点可以最少引两条直线与这条直线平行。
- (2) 在同一平面内，过直线外一点一条平行线也不能引。

用第二个命题代替第五公设，黎曼开创了椭圆几何（也称黎曼几何），而鲍耶和罗巴切夫斯基不约而同地想到了第一个命题，开创了双曲几何。

鲍耶的生平

鲍耶的父亲法卡什·鲍耶（Farkas Bolyai）是当地一位有名气的数学和物理教师，毕业于德国哥廷根大学，和“数学王子”高斯是同学。共同的志趣使法卡什·鲍耶和高斯两人成为好友，分别后经常有书信往来，共同研讨数学问题，其中第五公设问题成为他们之间经常交流的一个话题。他的理论思考始终离不开研究欧几里得的《几何原本》，虽然研究第五公设的奥秘花费了他大半生的心血，但最终也没有取得任何有价值的成果。但是，他在将欧氏几何的严密逻辑体系拓展到算术、代数和分析的理论上做出了有益的探索，这些工作还受到了高斯的称赞。

雅诺什·鲍耶于1802年12月15日出生于当时的匈牙利的柯罗日瓦尔（Kolozsvár），现在的罗马尼亚的克劳森堡（Cluj-Napoca）。他小时候，父亲在当地的加尔文



匈牙利分别于1960年与1975年发行的纪念鲍耶父子的邮票及他们的故居

主义学院 (Calvinist College) 教书；和当时的传统相似，父亲除了教数学外，还充当物理和化学老师。父亲希望自己的儿子成为一名数学家，并也沿着这个方向作出努力。同时，父亲认为光有一个智慧的大脑还不够，健康的身体发育应该是更重要的。所以小鲍耶小时候是德智体全面发展，这也为他成年后成为职业军人打下了良好的身体基础。

小鲍耶小时候就表现出了包括数学能力在内的全方位才能，整个一个小神童的形象：

他四岁时就可以分辨某些几何图形，就可以理解正弦函数，可以找出最知名的星座。五岁的时候他就有很强的阅读能力，并且这个能力几乎是自己独立开发的。他在学习语言和音乐方面表现了令人羡慕的天才。他七岁时开始拉小提琴，他几乎不费劲地就可以演奏一些很困难的曲目。

另一方面，小鲍耶生活在一个困难的家庭。父亲虽然在大学教书，但薪水微薄；虽然有一些兼职和外快，家庭的经济状况仍然很差。更糟糕的是，小鲍耶的母亲并非是一个称职的母亲，未能给他提供一个良好的家庭环境。

小鲍耶九岁以前基本上受的是私塾型的教育。父亲亲自教他数学，其它小学科目由当地最好的大学生家教。他九岁正式走进中学的校门。到13岁的时候，他已经掌握了分析力学、微积分等高等数学和力学科目；虽然父亲仍然是他的导师，这个时候他已经能够轻松地参与父亲任教的加尔文主义学院针对大四学生的专业课程。鲍耶尤其对欧几里得的几何学情有独钟，并且独立发现了一条重要定理：任何两个面积相等的多边形，将其中一个经过有限次分割，一定能够重新拼接成与另一个全等的多边形。

1818年，鲍耶16岁时，父亲写信给高斯，请他让自己这个天才的儿子住在他家并成为他的弟子。让父子两人非常失望的是高斯一口拒绝了。很难知道高斯拒绝的原因。否则小鲍耶能够在大师身边吸收科学营养，在哥廷根这个数学中心成长，可能对世界数学会有一样的影响。

1817年6月，鲍耶中学毕业。当时的匈牙利和附近的维也纳大学还不能提供高质量的数学教育，老爸也很难负担得起送儿子去国外更负盛名的大学去留学。经过痛苦地抉择，父子俩决定选择维也纳皇家工程学院的军事工程专业。鲍耶从1818年到1822年在皇家工程学院用了四年时间完成了七年的课程。他是一名出色的学生，从第二年开始学业就名列前茅。同时他也是学校的一名优秀运动员，并继续他的小提琴演奏，在维也纳参加业余表演。

鲍耶1823年参军成为工程兵的少尉，并被派驻在蒂米什瓦拉 (Temesvár) 的军事基地。在11年的军旅生涯里，他被誉为是奥匈帝国军队中最好的剑客和最优秀的舞蹈家。他既不抽烟也不喝酒，甚至连咖啡也不沾，时时保持着纯真和谦虚的品德，这在当时的军人里是很稀有的。令人惊讶的是，他还无师自通地掌握了九门外语，包括汉语和藏语！

鲍耶的数学研究

大约在1820年，在维也纳学习的鲍耶踏上了与老爸同样的路径，试图用一个可以从其它途径推出的公理来取代欧几里得的平行公设。开始，他也是从正面入手，试图用欧氏其它公设来证明平行公设，结果失败了。其父坚决反对儿子堕入在他看来是前途渺茫的深渊，1820年写信责

令儿子必须停止这项研究，信中说：

希望你从第五公设的研究上止步，你即使耗费所有的时间，也不可能证明这个问题……，我的青春和快乐已经空抛在这里。这个无底的黑暗或许可以吞吃掉一千个灯塔式的牛顿，这个夜任何时候也不会在大地上光明。

鲍耶显然没有听从父亲的忠告。但他开始了另一个路径：他遗留的笔记本表明他 1820 年已经开始研究双曲几何了。1823 年 11 月 3 日他在给父亲的信中说：

……（他）创建了一个全新的世界……（created a new, another world out of nothing）

不过稍后他在笔记本里加了几行注释，说那时这个理论尚未创建起来。到 1824 年，已经有证据表明他已经基本建立了一个完整的非欧几里得系统。1825 年 2 月，鲍耶亲自回到家乡柯罗日瓦尔，向父亲详细介绍自己的研究过程和成果，并请求帮助发表自己的论文。父亲的态度依然如故，对儿子阐释的研究成果难以理解，特别对“绝对几何”中的主要定理要依赖于一个任意常数而感觉迷茫，表示不能接受这种所谓“绝对几何学”。

“绝对几何”与欧氏几何的重大不同，明显表现在三角形内角和的差异上。在“绝对几何学”中，三角形的内角和是一个小于两直角 π 的变量，它随着三角形面积的增大而减小，当面积趋近于零时，它趋近于 π 。更确切地说，有

$$\triangle ABC \text{ 的面积} = K[\pi - (\angle A + \angle B + \angle C)] \quad (1)$$

其中 K 是取定的一正常数，差 $\pi - (\angle A + \angle B + \angle C)$ 称为 $\triangle ABC$ 的“亏值”。上式表明，三角形的面积与这个三角形的亏值成正比，易见当 $S_{\triangle ABC}$ 增大时，亏值亦增大，从而内角和减小。

可能太难了，或者因为儿子不听话，父亲的反应极不热烈。这使得鲍耶这次回家感觉很差，乘兴而来，败兴而归。1826 年，他在驻军基地巧遇了一个船长沃尔泽·冯·艾克维尔（Wolther von Eckwehr），此人曾经是他在维也纳皇家工学院的数学老师。他把论文的德文抄稿寄给母校的数学老师，请求评审和支持，不但石沉大海，手抄稿还被遗失了。

直到 1830 年，鲍耶在部队换防去另一个地方伦贝格（Lemberg）的途中决定再次回家看看。这次情形大不一样，父亲已经看懂了儿子的工作，知道这是了不起的创新。他强烈建议鲍耶把他的工作写出来，作为附录放在他自己即将出版的著作《写给好学青年的数学原理》（*Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae*）第一卷的末尾里。这是一个伟大的建议。正如鲍耶后来写的那样：



高斯（1777-1855）

如果不是我的父亲敦促甚至强迫我立即把我的工作写在纸上，可能附录的内容永远难见天日。

就这样，鲍耶的不朽之作《空间的绝对几何学》（*Appendix Explaining the Absolutely True Science of Space*）得以流传了下来。这篇被压缩到 24 页的论文，是鲍耶一生中发表的唯一论文。由于论文压缩得过于简洁，内容越加显得抽象深奥，即便数学家都难以读懂，严重影响了这一伟大思想的传播。

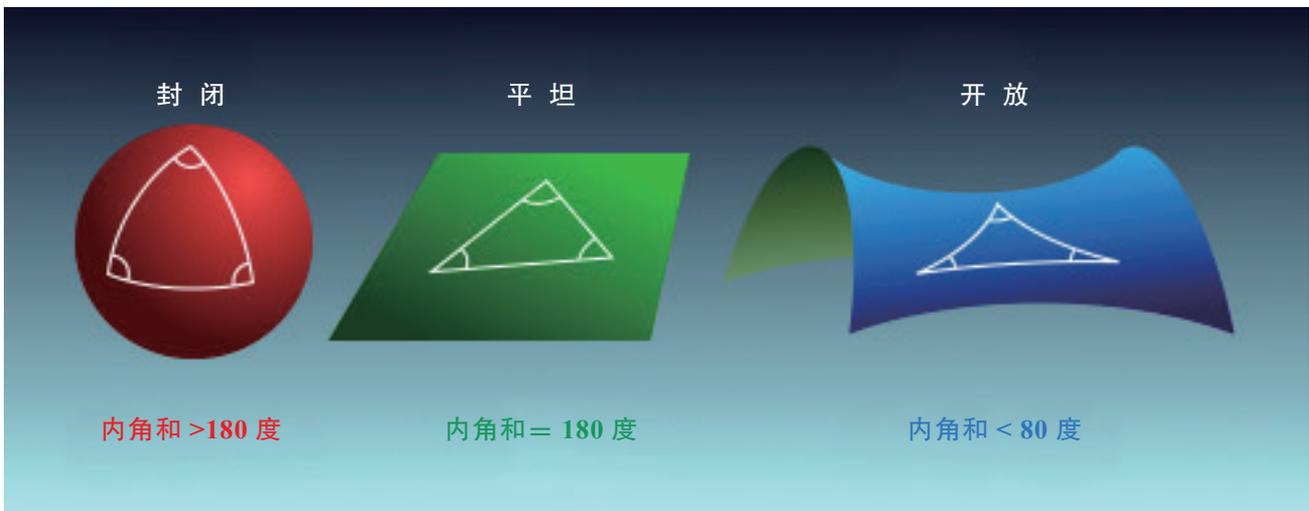
1831 年 6 月 20 日老鲍耶写信给老同学高斯，并将儿子《附录》样稿寄给他，想听听他的意见，但高斯没有回信。1832 年 1 月 16 日他又给高斯去信，这次终于有了回音。高斯在 3 月 6 日的复信中写道：

关于你儿子的工作，当我一开始便说我不能称赞他时，你一定会感到震惊……，因为称赞他便等于称赞我自己，文章所有内容，你儿子采取的思路、方法以及所述结果，和我在 30 至 35 年前已开始的一部分工作完全相同，我真是被这些结果吓住了，……，但我本来就是不愿发表的，……

虽然高斯在信中夸奖鲍耶是

一流的天才青年几何学家（I regard this young geometer Bolyai as a genius of the first order）

但鲍耶看到信后还是感到心情沉重：他不相信别人比他更



在双曲抛物面上的一个三角形，内角和小于 180 度

早达到同一结果，认定高斯在这个发现上要夺优先权。尽管他后来相信高斯所讲的是真话，但仍认为高斯没有公开自己的发现是一个不可原谅的错误。

毫无疑问，高斯信中说的是事实。从他 1824 年 11 月 8 日写给弗朗茨·托里努斯 (Franz Taurinus) 的信中可以看出他对非欧几何的认识：

一个三角形的三个内角和小于 180° 这一假设可以导致一个奇怪的几何学，这与我们现行的“欧几里得几何”相当不同，但却也是可以自圆其说的。我已经可以把这个理论发展到非常满意的情形，唯一不完美的是要确定一个事先未知的常数。

高斯早于自己知道非欧几何理论对鲍耶是沉重的打击；他从此变得一蹶不振。他开始变得像另外一个人，脾气暴躁，极难与人相处。更糟糕的是，他的身体也出了问题，经常发烧，使他很难胜任军队事务。1833 年 6 月 16 日他不得不提前退伍，靠退伍金维持生活，并且短期里回到父亲身边同住。

不久鲍耶离开父亲，搬到偏僻的多马尔德 (Domald) 地区的一个小乡村。1834 年，他与当地一位妇女结婚，生有三个孩子，生活贫困潦倒，父子、夫妻感情都有很多问题。1856 年，他的父亲去世，同年，他与妻子离婚。

鲍耶怀有极深的数学情结，尤其是对非欧几何的思考从未停止。鲍耶甚至还尝试过将非欧几何的理论扩充到立体几何的工作，重点研究过绝对空间中四面体的体积问题。但是，鲍耶一直都不知道，远在几千里之外的俄国有一个叫罗巴切夫斯基的数学家，和他做着同样伟大的工作，直到 1848 年，他获悉罗巴切夫斯基早于他三年，在 1829 年

就发表了非欧几何的研究成果。这件事情激起了他的思想波澜，一度怀疑这是高斯在幕后操纵的闹剧。倒是他的父亲对待这件事情的态度显得洒脱，他写信劝慰鲍耶说：“许多思想都有自己产生的时代。在同一时代它们又在不同的地点被发现，恰似春天的紫罗兰在阳光明媚的大地上到处开放一样。”

除了非欧几何的伟大工作之外，鲍耶也曾在复数理论的研究方面投入了很多精力。1833 年，他获悉莱比锡大学的数学研究机构征询关于“虚量的严格几何构造”的学术成果，他立刻整理投寄了一篇关于虚数理论的论文，猜想在复数理论中存在“超复数”，并且构造了“三维复数”的一种表示法，这个结果同样没有引起数学界的关注。后来，数学家哈密尔顿完满地解决了这个难题，建立了成熟的理论。鲍耶从此对公开发表论文感到心灰意冷，虽然留下了两万页的数学手稿，但是，从此以后，他再没有试图发表过一篇数学论文。

1860 年 1 月 17 日，鲍耶在贫病交加中结束了凄惨的生命。他死于肺病，被埋葬在奥匈帝国的一个偏僻小镇茅罗什瓦萨尔海伊 (Marosvásárhely) 的墓地里。

非欧几何理论的确立和影响

鲍耶去世后的几年里，非欧几何的理论在国际数学界仍然时常遭到讥笑和反对。直到 1868 年，意大利数学家贝尔特拉米 (E. Beltrami) 利用微分几何的最新研究成果，在现实空间里发现了可以实现非欧几何的一种现实模型，它是形如喇叭状的一种曲面，称为伪球面。非欧几何的理论开始引起了数学界的关注。20 世纪初期，非欧几何理论

在爱因斯坦的广义相对论中得到证实和应用，同时在粒子微观空间领域研究中也得到证实。数学家们才真正认识到空间形式原来不仅仅只是欧氏几何里的三维空间，欧氏几何之外还存在另外的几何。非欧几何的理论才能更加精确地描述和深刻地揭示任意的空间形式。因此，数学家们从根本上改变了对几何本质的原教旨理解。非欧几何的理论直接影响了一百多年来数学许多领域的发展走势，而且对天文学、宇宙学和天体物理学的发展以及人类时空观念都产生了极为深远的影响。正如爱因斯坦（Albert Einstein）所指出的：“大量事实已经证明：从非欧几何发展起来的思想是无可限量的。”

1894年，鲍耶这位非欧几何的拓荒者离开人世34年后，匈牙利数学物理学会在偏僻小镇的荒郊找到了鲍耶的坟墓，他们在这座坟墓上竖立起鲍耶的雕像，并把他传世的唯一论文《空间的绝对几何学》列入世界数学经典之作，藉以纪念他创立非欧几何的不朽功绩。作为非欧几何创始人之一的他生前穷苦潦倒，学术思想无人重视，去世三十多年后，终于和高斯、罗巴切夫斯基一起，被数学界公认为非欧几何的创始人之一。

1905年，匈牙利科学院为了纪念雅诺什·鲍耶这位非欧几何的创始人，宣布设立“鲍耶奖”，奖金为一万克朗，以奖励在过去五年中为数学的进步做出巨大贡献的数学家。第一届“鲍耶奖”授予了数学大师庞加莱（J. H.



贝尔特拉米伪球面

Poincaré)。1910年秋天，第二届“鲍耶奖”授予了数学大师希尔伯特（D. Hilbert）。鉴于爱因斯坦将广义相对论的思想完全解析化，从而证明了把星际空间看作非欧几何空间的真实性，1915年希尔伯特又亲自提名将第三届“鲍耶奖”授予伟大的物理学家爱因斯坦。国际数学界对鲍耶在数学历史中的地位予以了充分的肯定。



作者简介：张小平，1957年出生于广东省广州市。1978年2月考入河南大学数学教育专业。高中在新疆就读时有幸成为张景中院士的学生。现为新疆兵团第二师华山中学高级教师。曾在《数学通报》、《数学传播》等刊物发表文章二十多篇。



作者自述：刺克，曾就读于国内某非著名大学，后又在美国某非著名大学获得数学博士学位。其人恐高晕针怕寂寞，能说好动热爱生活。