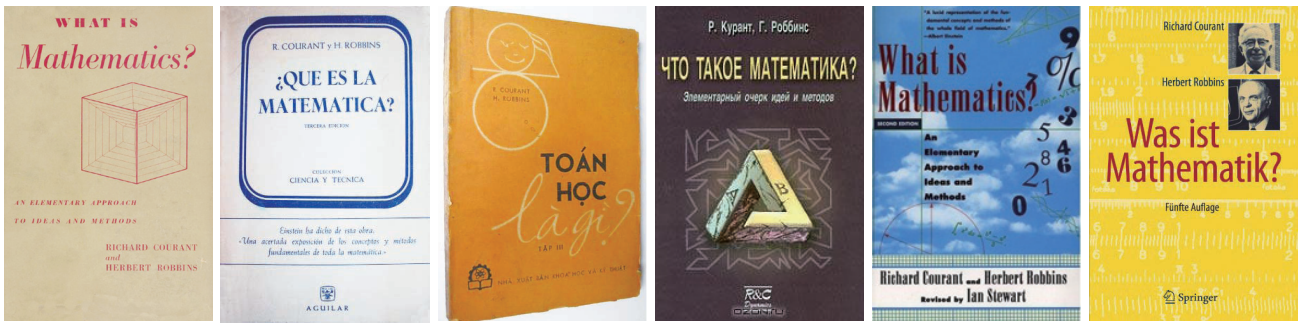

最美的数学就如文学

——普及经典《数学是什么》的故事与推介

欧阳顺湘

最新英文版

书名：What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods（Second Edition）；
作者：Richard Courant（理查德 • 柯朗），Herbert Robbins（赫伯特 • 罗宾斯）；
增订者：Ian Stewart（伊恩 • 斯图尔特）；
出版社：Oxford University Press, New York（牛津大学出版社，纽约）；
出版年：1996；
其它：592 页，平装；
英文影印版：人民邮电出版社，2009。

部分中文译本

1. 汪浩 / 朱煜民（译）:《数学是什么》，湖南教育出版社，1985，547 页；
2. 左平 / 张饴慈（译）:《数学是什么》，科学出版社，1985，671 页；增订版:《什么是数学：对思想和方法的基本研究》（西方数学文化理念译丛），复旦大学出版社，2005，584 页。

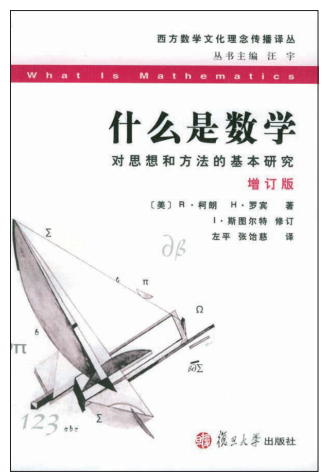

图 1 左平、张饴慈译本（增订版）

1 写在前面

“两千年以来，谙熟一定的数学知识是每一个文明人应有的基本智力。”

这是 70 余年前著名数学家柯朗为他与当时只是年轻的拓扑学博士、后来成为著名统计学家的罗宾斯合著的数学普及经典名著 *What is Mathematics*?（以下统一以《数学是什么》作为译名）第一版所写序言的第一句话。在我年少第一次读到这句话时，心中有些震动：数学有如此魅力？难道每一个受过教育的人都该如每个中国人应被唐诗浸淫过一样被数学熏陶过？

我所感知的或与我后文将提及的阅读体验有关——那时我主要接触的大多是非科学类书籍。自然也多少与我们的传统有关。我国传统重视的是经史子集之类的人文学科。“数”只是六艺之末，算学学官为从九品。《颜氏家训》说“（算术）可以兼明，不可以专业”。而西方文明素以古希腊文明为源，后者对数学教育异常重视。今日中国，数学因为应用而变得必不可少且日益重要，但要使数学教育深入人心，作为人文教育的一部分，尚需时日。而柯朗接着所写的——“但今天，数学教育的这种传统地位已经岌岌可危。不幸的是，数学工作者对此要负一定的责任”——或在今日仍有意义。

对青年朋友来说，怎样获得有效的数学素养？对教育工作者来说，怎样进行有效的数学教育？让我们来了解这一经典，读读这一名著，认识数学是什么，借鉴下柯朗开出的药方吧。

2 经典常青

1941 年，《数学是什么》甫一出版，当即好评如潮，成为畅销书。《纽约时报》写道：“无论是专家抑或其他任何对科学思考感兴趣的人都应该拥有这本书。”很多名人如著名数学家外尔（Hermann Weyl, 1885-1955）、莫尔斯（Marston Morse, 1892-1977）等都对之给予很高的评价。甚至爱因斯坦也称此书为“对整个数学领域中基本概念及方法的清晰、透彻的阐述”。

70 余年足以将真正的经典沉淀。至今该书英文版即已数次再版——1943、1945、1947 分别为第二、三、四版，1996 年又由著名数学科普作家斯图尔特增订（该增订版称为第二版应是相对于 1978 年首次平装版而言）；英文版也多次重印——至 1967 年该书英文版就已经重印了 13 次。译本也很多，有中、德、俄、西、越、日等语种的译本；而中译本就有五种。

在大陆，常见的中文译本是前列左平 / 张饴慈、汪浩 / 朱煜民的两个译本。实际上，早在 1951 年，该书的第一个中文译本《近代数学概观》就已出版。这个译本由上海中华书局分四册出版，译者分别为：齐植荣（第一册）、余介石 / 杨锡宽（第二册）、杨宗磐（第三册）、张春木 / 孙炳章（第四册）。汪 / 朱和左 / 张译本的译者序中都提及这样一个“文言”译本，虽然简单地连具体书名亦未指出。

台湾也有两个译本——一是由吴英格等人翻译，徐氏文教基金会于 1977 年出版的《数学是什么》[1]；二为容士毅翻译，左岸文化出版社于 2010、2011 年先后出版的《数学是什么（上、下）》。

一本数学著作，不但被译为多国文字，还存在这么多的中译本，是一个传奇。对于能有机会翻译此书，译者该是深感快意的。杨宗磐在其所作“译者跋”中即说：“能将这继承 Klein, Hilbert 之严格不忘直观的伟大学风的名著之一部，移于我国，是译者最感荣幸的。”

新版《数学是什么》的英文影印版和中文增订版（左 / 张译本）在国内的网络书店的销售排名中都名列前茅，这也足以说明该书的生命力。在亚马逊网站上，该书被评为四星半。读者还可以在中外不少相关网络上见到许多读者对此书的推介。

罗塔[2] 曾希望有人教他的十大教训之一是：数学家更有可能因其诠释性的文字被世人记住，而非其原创性研究。他还举例说，“希尔伯特空间”这一概念，是斯通（Marshall Stone, 1903-1989）和冯 • 诺依曼根据希尔伯特的一本阐述积分方程的书而引入的，而海林格（Ernst Hellinger, 1883-1950）等做出过重要贡献的一些数学家则被遗忘了。显然，柯朗与罗宾斯这一本书是罗塔所提教训的另一个令人信服的实例。

3 大家柯朗

笔者最早接触此书时并不知道这是一本名著，对柯朗、罗宾斯也没有什么了解。我们先简要介绍下该书的作者，以帮助读者更好地了解这本书。

理查德 • 柯朗（Richard Courant, 1888-1972，也见译为库朗、库兰特）出生于德国，是 20 世纪杰出的数学家，在数学物理、变分法等方面有很深刻的研究。柯朗很小时即随父母来到布雷斯劳（Breslau，即现波兰城市弗罗茨瓦夫［Wrocław］）生活。或许值得一提的是后文将提及的托普利茨就出生在布雷斯劳，仅比柯朗年长 7 岁。他们曾一起学习。后来托普利茨去哥廷根学习，也鼓动了柯朗前往。

柯朗在哥廷根曾任希尔伯特的学生兼助手，他和克莱因、希尔伯特关系深厚，是哥廷根传统的重要继承人。1910 年他获得博士学位时年仅 23 岁。1933 年，因纳粹逼迫而离任哥廷根大

[1] 在线超星数字图书馆可阅读 http://book.chaoxing.com/ebook/read_10515719.html。

[2] 吉安 - 卡洛 • 罗塔（Gian-Carlo Rota, 1932-1999），杰出的组合数学家。其说法见 Gian-Carlo Rota 著，Fabrizio Palombi 编辑的 *Indiscrete Thoughts* (Modern Birkhauser Classics)，Birkhauser Boston, 1996。亦见 Blank 的书评：Brian E. Blank, *What Is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods, book review*, Notices of the American Mathematical Society 48, 11 (December 2001), pp. 1325-1329。

图 2 柯朗（Richard Courant, 1888-1972）与柯朗数学科学研究所

学数学所所长职位的柯朗逃离德国，先到剑桥大学后于 1934 年以访问教授的身份来到纽约大学。1935 年，他受邀在纽约大学建立数学系。二战前数不清的数学家被迫逃离德国，其中很多在柯朗的帮助下在美国获得职位。

《数学是什么》的撰写被柯朗当作对美国提供职位的回报，实也源于柯朗对数学传播的兴趣。在纽约，他曾积极向公众演讲普及数学知识、演示肥皂膜实验，提高人们对数学的兴趣。他的学生则帮着他整理讲稿。

除了《数学是什么》，柯朗还有不少脍炙人口的经典，如《数学物理方法》[3]、《微分与积分计算》[4] 以及《微积分和数学分析引论》[5]。这些书籍都有中译。

但相比数学创造，柯朗杰出的领导才能更为人称道。在纽约大学，柯朗白手起家，率领他的研究群体，从无到有最终建立了著名的应用数学研究所——19 世纪 60 年代该所更名为柯朗数学科学研究所，至今仍是最好的应用数学研究中心之一。该所的建立在一定程度上象征了希尔伯特在哥廷根创建的科学殿堂在纽约的重建，哥廷根学派的传统在美国的延续，以及世界数学中心从德国到美国的转移。

柯朗也培养了不少人才。据数学家谱系网[6] 的不完全统计（中国学生未记录），柯朗至少培养了博士生 35 人，并有“后代”学生 4 千多人。值得我们回忆的是柯朗在哥廷根的两位中国学生——魏时珍和朱公谨[7]，他们同为 1935 年在上海交通大学成立的中国数学会的发起人和第一届理事会成员。在本文附录中我将简介这两位中国学生，既是为了使读者了解柯朗以及哥廷根的数学影响，同时也是有感于这两位的文化魅力。此外，朱公谨翻译的柯朗的微积分教材，不但水平很高，而且可以看出其中一些内容在《数学是什么》中有所反映，是值得介绍的。

关于柯朗更多的介绍，有兴趣的读者可以阅读美国女作家康斯坦丝 • 瑞德（Constance Reid）所作的柯朗传[8]。

4 罗宾斯记

赫伯特 • 罗宾斯（Herbert Robbins, 1915-2001）出生于美国。他最早在数学界出名即是源于他和柯朗合作的这本《数学是什么》。他在中学时对数学并不特别感兴趣，独钟于文学，常在放学后去公共图书馆读书，“读完了那里的每一本书”[9]。1931 年罗宾斯入读哈佛大学，后跟随著名拓扑学家惠特尼（Hassler Whitney, 1907-1989）进行拓扑学研究并于 1938 年获得博士学位。此后莫尔斯邀请他去普林斯顿大学做他的助理，为期一年。但罗宾斯亟需一个永久职位以给母亲和妹妹经济资助。不久恰好柯朗到普林斯顿寻求合适的助手。莫尔斯推荐了罗宾斯。于是 1939 年罗宾斯到了纽约大学。

罗宾斯后来以统计学家的身份而闻名。他最后任新泽西州拉特杰斯（Rutgers）大学的数理统计教授。著名统计学家奈曼（Jerzy Neyman）在他的两篇论述上世纪下半叶统计学进展的综述中所列突破主要都是由罗宾斯获得。学过概率论课程的朋友或许知道所谓的随机变量序列的完全收敛（complete convergence）[10]，此即是罗

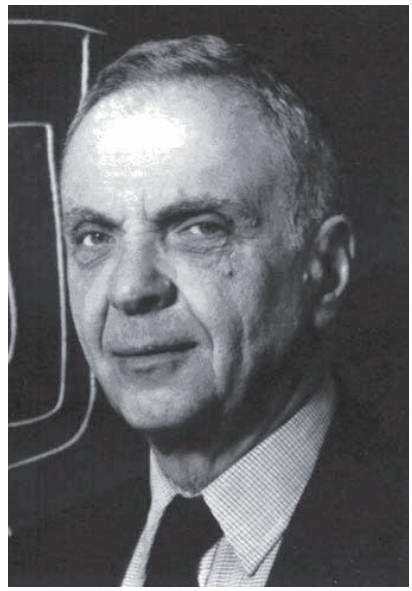

图 3 罗宾斯（Herbert Robbins, 1915-2001）

[3] *Methods of Mathematical Physics*，与希尔伯特合作，德文原著 *Methoden der mathematischen Physik*。

[4] *Differential and Integral Calculus*，德文原著 Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung。

[5] *Introduction to Calculus and Analysis*，与约翰（Fritz John）合著。

[6] 参比勒费尔德大学的镜像：http://genealogy.math.uni-bielefeld.de/genealogy。

[7] 后来还有受这两位影响而赴哥廷根随柯朗做博士论文的蒋硕民，后因柯朗的离开而随他人继续学习。

[8] Constance Reid, *Courant, Springer*, 1996。中译可参考胡复等翻译，东方出版中心于 1999 出版的《库朗：一位数学家的双城记》。

[9] Donald Albers and Gerald Alexanderson (eds.), *Mathematical People: Profiles and Interviews*（《数学人物》），Birkhäuser, 1985。

[10] 概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的随机变量序列 $(X_n)_{n\geq 1}$ 完全收敛到随机变量 X 指对任意的 $\varepsilon>0$，$\sum_{n\geq 1}^{\infty}\mathbb{P}\left(|X_n-X|\geq\varepsilon\right)<\infty$。该收敛蕴含 $(X_n)_{n\geq 1}$ 几乎处处收敛。但若 $(X_n)_{n\geq 1}$ 独立，则反之亦对。

宾斯和我国杰出的统计学家许宝騄在他们合作的一篇短文中提出来的。

罗宾斯曾说他没能在拓扑学领域立足与花费太多时间撰写《数学是什么》有关——直到 1941 年他才得以将自己的论文付梓。他转向统计学，却也和柯朗的一次有意或无意的栽培有关。罗宾斯在纽约大学任教期间，柯朗邀请他早年在哥廷根的学生、著名的概率论学家威廉·费勒（William Feller, 1907-1970）来讲授概率论与统计学，但在课程都安排好并公布了之后，费勒却不能来讲课。于是柯朗要此前对概率论和统计学一无所知的罗宾斯来讲授这门课程。

罗宾斯开始真正的统计学研究是受战争的启发。1942 年，罗宾斯加入了海军预备役。期间他听到两位高级海军军官讨论炸弹落点的效率问题。后来他写了“随机集合的测度”的论文。罗宾斯的经历足够传奇，当他领到退役补贴，置买土地，准备解甲归田时，接到电话邀请去教测度论、建立新的数理统计系。那时，概率统计作为学科并不被看好。罗宾斯曾被告诫：概率论与统计学家最要紧的任务是证明概率论与统计学是数学的一部分。这也说明罗宾斯筚路蓝缕、开拓新领域的功劳。

与罗宾斯有关的另一件趣事是美国数学会自 1938 年正式开始组织的普特南（Putnam）年度数学竞赛。该赛事源于几年前西点军校和哈佛大学之间一武一文的比赛。1931 年，西点和哈佛举行足球比赛，上半场哈佛队落后，中场休息期间，当时的哈佛校长劳伦斯（A. Lawrence）不服气，对西点的首长说：“你们的小伙子虽然或能赢得足球比赛，但我敢打赌我们一定能在数学比赛中击败你们。”西点同意了。1933 年，在劳伦斯的亲戚普特南（William Lowell Putnam）的支持下，两方举行了数学比赛，每方 10 名队员。结果哈佛落败了。参加这次数学竞赛的哈佛队员中就有罗宾斯，而教练即是在罗宾斯博士毕业后提供职位的莫尔斯。

5 斯图尔特

斯图尔特（Ian Stewart）现为华威大学（Warwick University）的数学教授。他在将数学向公众推广方面很知名，撰写了许多普及读物，其中不少已被翻译为中文，如《上帝掷骰子吗——混沌之数学》[11]、《二维国内外数宇漫游奇历记》[12]、《第二重奥秘：生命王国的新数学》[13]、《自然之数》[14] 等书。他还是《科学美国人》杂志的专栏作者。1995 年他还因科普成就而获迈克尔·法拉第奖（Michael Faraday Medal）。

6 严肃读本

数学普及读物大致有三类：

- 一是涉及数学历史、哲学、方法论等方面的著作，如哈代的《一个数学家的辩白》、阿达马的《数学领域的发明心理学》[15]，以及许多数学家传略；
- 二是趣味数学类书籍，这类书通过通俗易懂且使人感兴趣的问题与方法来传播一些数学思想和知识。著名的有如马丁·加德纳（Martin Gardner）所编写的很多书。我们今天也能见到有的数学家在积极通俗地传播数学，希望读者用同看电视、阅读卡通书籍那样只看不想的轻松方式对数学有一定的认识；
- 三是较“严肃”的数学读物。这类书比一般读者觉得枯燥的数学教材更多阐述性的叙述，更多引导，可读性更强，但又可从中学到一些“真的数学”。阅读这类书，对读者的要求也较高；读起来虽然不总是很轻松，但所获却是翻阅许多娱乐数学类读物所不及的——这也恰是经典的共性。

《数学是什么》即是第三类较严肃的数学普及读物。剑桥大学数学系有一个给新生推荐参考书的小册子，《数学是什么》也在第三类书中；斯图尔特最早也是因此小册子而得悉该书。

柯朗在其书的第一版序言（参汪 / 朱译本）中解释《数学是什么》是作为普及性读物而撰写的，假定的读者为受过教育的外行，仅需良好的高中文化水平。然而读者应当具备成熟的智力且愿意独立思考，因为柯朗的目的是使他们真正接触到数学的实质内容，柯朗认为为此不可能“不劳而获”，“若仅持娱乐消遣的态度而不下工夫吃苦研究，亦将一无所得”。

柯朗还批评虽然传记、历史著作以及有趣的通俗读物能够普遍地引起读者对数学的潜在兴趣，但学问不能单凭间接的方法获得。他还比喻：“如果一个人从未集中思想倾听过音乐乐章，而单靠最出色的报刊杂志来获得音乐教育，那就无异于缘木求鱼。”无独有偶，日本概率论大家伊藤清甚至更进一步比喻，说数学之美不同于音乐和建筑之美（如莫扎特的音乐和科隆大教堂），后者可以使门外汉通过感官直接获取，然而数学之美只有通过对数学公式的理解来取得。

按照后面介绍的罗宾斯的比喻，阅读《数学是什么》的读者不应知难而退，可以将自己比作在参加 17、18

[11] *Does God Play Dice? The New Mathematics of Chaos*, 潘涛译，上海远东出版社，1995。
[12] *Flatterland*, 暴永宁、胡晓梅译，湖南科学技术出版社，2008。
[13] *Life's Other Secret: The New Mathematics of the Living World*, 周仲良等译，上海科学技术出版社，2002。
[14] *Nature's Numbers*, 潘涛译，上海科学技术出版社，1996。
[15] Jacques Solomon Hadamard（1865-1963），*An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*, New York: Dover Publications, 1954。

世纪法国文化沙龙[16]，渴求知识和智力训练的文明人。柯朗的这本书以及他著的数学教材（如后文将介绍的微积分教程）的一个特点就是，柯朗在智力上将读者与自己同等看待，不回避难点，叙述方式宛如只是一位长辈只因先生而早知般地向读者介绍数学。

重视对数学的真正理解、独立思考的能力的提高也恰是柯朗批评数学教学投机取巧找终南捷径的判据。柯朗在《数学是什么》的序言中写道："数学的教学，逐渐流于习题的空洞演练，虽然这或可有助于发展形式演算的能力，但却无益于对数学的真正理解，不利于提高独立思考的能力。"

7《论数与形》

因为我们的目的主要是介绍书，我们且枝蔓开来，介绍另外一本"第三类"数学普及经典《论数与形》，恰好它也可用来烘托《数学是什么》。

在数学类书籍出版方面很有影响的德国斯普林格出版社（Springer）[17]在对《数学是什么》推荐语中说它是与拉德梅彻 - 托普利茨和胡维兹（Hurwitz）的名著组成的三部曲中的第三乐章[18]。拉德梅彻与托普利茨的经典著作是指德国著名数学家汉斯 • 拉德梅彻（Hans Rademacher, 1892-1969）与奥托 • 托普利茨（Otto Toeplitz, 1881-1940）的《论数与形》[19]。这也是一本既适合高中生阅读，对专业数学家也有益的普及图书。实际上笔者第一次知道该书，是因某综述文章对此书有关等周问题初等阐述的引用。该书共22节（第20节分a, b两文），用初等的语言，分节介绍具体的经典数学问题，如组合问题、华林问题等。其介绍清晰，且着重问题的逻辑，例如，介绍几何平均和算数平均之间的关系时，还花了较多笔墨用例子介绍这两个平均的概念和优劣。

两位著名数学家曾谈及他们少年时阅读此书的经历。

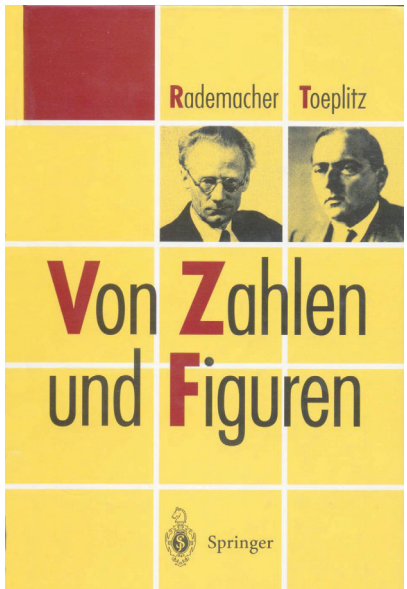

图4《论数与形》一书的封面（德文版）

阿贝尔奖获得者拉克斯（Peter Lax, 1926-）在台湾数学杂志《数学传播》对他的专访中说[20]："12岁时，我开始对数学感兴趣。……我们所读的第一本书是拉德梅彻 - 托普利茨的书。……书内的章节都很短，只有5、6页，对刚开始学习数学的学生是很合适的。即使今日，我仍会推荐这一本书给对数学有兴趣的年轻人。"

沃尔夫奖、邵逸夫奖获得者阿诺德（Vladimir Arnold, 1937-2010）在接受俄罗斯著名的数学、物理方面的科普杂志"Kvant"的采访（1990年发表）时，说他的第一本启蒙数学书也是拉德梅彻 - 托普利茨的书。他还回忆起他一天只读几页地咀嚼该书[21]。

《论数与形》和《数学是什么》两书都是由名家撰写，风格也接近，在严肃地讲数学问题，而且很多经典问题两本书都有讨论，例如极小极大、等周问题、四色定理、毕达哥拉斯定理和费马大定理、多面体和欧拉公式等。事实上，《数学是什么》书末所列一般参考书目中即有《论数与形》一书。只是《数学是什么》较系统，而且有微积分等较高等的内容。

可见有的数学家是因为阅读《论数与形》而与数学结缘。可以想象，也有不少数学家因为《数学是什么》而喜欢数学。

1997年阿诺德在巴黎演讲《论数学教育》[22]，在批评法国的数学教育时也同时提到这两本书：

"我对此异常震惊：所有那些写得最好而且最重要的阐述数学方法的书在这里却几无学生知晓（在

[16] 沙龙是法语salon的音译。原意为客厅。在十七、十八世成为上层社会举行集会，讨论文艺、政治、科学的代名词。法国梅森（Mersenne，1588-1648）神甫曾在巴黎每周举办一次数学沙龙，其客人有费马、笛卡尔和帕斯卡父子。1647年年轻的帕斯卡就是在这里认识笛卡尔的。

[17] 斯普林格出版社进入数学物理出版领域恰是源于柯朗的建议；特别是斯普林格的"黄宝书"系列（Grundlehren）也主要因为柯朗的贡献。

[18] 原文为："Dritte Staffel der 'Golden Oldies' zusammen mit den beiden modernen Klassikern von Rademacher/Toeplitz und Hurwitz"。笔者不清楚Hurwitz的哪本书较适合初学者。

[19] 1930年第一版，德文书名为 *Von Zahlen und Figuren: Proben mathematischen Denkens für Liebhaber der Mathematik*，意为《论数与形：写给数学爱好者的数学思想举例》，其英文译本名为 *The Enjoyment of Mathematics:Selections from Mathematics for the Amateur*，中文译本有左平根据英文转译的《数学欣赏》，北京出版社，1981。

[20]《数学传播》，2002年第26卷第4期，总第104期，参 http://w3.math.sinica.edu.tw/media。

[21] 参下书的前言：*Mathematical Omnibus: Thirty Lectures on Classic Mathematics*，Dmitry Fuchs 和 Serge Tabachnikov 著，美国数学会出版，2007。该书基于作者在"Kvant"上发表的系列文章，类似于《论数与形》，介绍各种数学问题，似无中译。

[22] *On teaching mathematics*, 1997年3月7日在巴黎Palais de Découverte的演讲的扩充版，以俄文发表于Uspekhi Mat. Nauk 53 (1998), no. 1 (319), 229–234; 英译发表于 Russian Math. Surveys 53 (1998), no. 1, 229–236。可免费下载。HTML版本可参 http://pauli.uni-muenster.de/~munsteg/arnold.html。中译将刊登于《数学文化》。

图 5 波恩大学数学所门后走廊一侧的纪念牌，其上德文意为：纪念 Otto Toeplitz，1.8.1881-15.2.1940，数学家，教师与同事，从 1928 到 1935，因他是犹太人，被纳粹贬低、侮辱与驱逐。另一面有类似纪念牌纪念同是犹太人而被迫自杀的豪斯多夫。（请注意德语日期写法日：日．月．年，图片为作者摄于 2011 年 9 月。）

我看来，甚至可能没被译为法文）。这些书有拉德梅彻 - 托普利茨写的《论数与形》，……，柯朗和罗宾斯写的《数学是什么》……[a]。”

[a] 阿诺德提及的其它书有：希尔伯特和康福森（Stephan Cohn-Vossen，1902-1936）写的《直观几何》；波利亚（George Polya，1887-1985）写的《如何解题》和《数学合情推理》；克莱因（Felix Klein，1849-1925）写的《19 世纪数学发展史》。

8《高观点下》

另一本值得比较的书是克莱因（Felix Klein，1849-1925）所著的《高观点下的初等数学》[23]（下简称《高观点下》）。克莱因是哥廷根学派的创始人、国际数学教育的奠基者。该书源于克莱因为德国中学数学教师和高年级大学生开设讲座的讲义。他希望中学教师能从高等数学的视角来理解中学数学的教学。

柯朗对克莱因的《高观点下》是推崇的。正是由于柯朗的努力，才使得该书能从早期“石印”版变为斯普林格的正式出版物。然而，两书也有很明显的差别。柯朗 1938 年开始写作《数学是什么》时，立意要使自己的书能有更广的读者。他在给马克思 • 波恩的信中介绍[8]自己的书：“这本书是给数学教师的。它并不是科普读物，而是从初等数学的角度来谈高等数学的。这本书与克莱因的书差别很大，我想写它是十分必要的。”

图 6《高观点下的初等数学》

两书的读者对象不同，阅读《高观点下》需要有较高的程度——克莱因所谓的初等数学并不低等。为此两书叙述的方式也不同。克莱因是高屋建瓴，以俯视的姿态看待初等数学的问题；而柯朗的书是循序渐进，从初等问题出发，介绍高等数学中的数学思想和方法。这一点从英文书名的副标题也可以看出（笔者以为左 / 张将副标题翻译为“对思想和方法的基本研究”是不甚恰当的）。所以这也决定了柯朗的书更加适合初学者。

令人尊敬的是，《高观点下》的第三卷中译是吴大任与其夫人在 80 多岁的高龄根据德文原著翻译而成的。吴大任曾在回答红卫兵时说他将来准备翻译数学书，说这个要求不低，“这是一项有意义的，必要的，也是为人民服务的一种方式”。我们后面还将论及这种中国前辈数学家对外国数学名著进行译介的努力。

9 禁书风波

1947 年，《数学是什么》的俄文译本在前苏联出版。当时，第二次世界大战的硝烟刚刚散去，铁幕徐拉。该书可理解地被查，于是柯尔莫哥洛夫写了一个未署名的介绍[24]，指出这本书是对俄语文献的有益补充。当然他也批评了《数学是什么》对俄罗斯数学家所作贡献的忽视：切比雪夫[25]对数论的贡献，罗巴切夫斯基对几何学的贡献等都未在书中介绍。熟悉历史的读者都会对该文章最后的宣言有所理解：“资产阶级科学家不可能对数学的未来有贡献，这是我们苏联数学家的任务。”

按概率论学家 Shiryaev 的说法[26]，

[23] 舒湘芹 / 陈义章等译，复旦大学出版社，2008。

[24] 参俄文译本《数学是什么》第三版中放在书末的介绍。

[25] Pafnuty Chebyshev，1821-1894，在数论方面有著名的伯特兰 - 切比雪夫定理：对于所有大于 1 的整数 n，在 n 与 $2n$ 之间必存在一个素数。

[26] 见 A. N. Shiryaev 为 *From the Heritage of A. N. Kolmogorov: The Theory of Probability,* Theory Probab. Appl. 48, pp. 191-220”一文（主要内容为《数学的内容》一书第 11 章——柯尔莫哥洛夫所撰的概率论专题的英译——以及柯尔莫哥洛夫与亚历山大洛夫等的相关通信）写的前言。

图 7《数学——它的内容,方法和意义》(第一卷）的中文译本封面

《数学是什么》激起了苏联数学家来创作类似的普及图书。其结果就是前苏联于 1956 年由著名数学家亚历山大洛夫（A. D. Aleksandrov）、柯尔莫哥洛夫（ A. N. Kolmogorov）和 M. A. Lavrent'ev 等主编出版的《数学——它的内容，方法和意义》一书（以下简称为《数学的内容》)。与《数学是什么》主要由两人撰写不同，该书共 3 卷 20 章，分别由各学科的专家撰写。其中不但有亚历山大洛夫、柯尔莫哥洛夫分别撰写的他们擅长的曲线和曲面、概率论等主题，还有如盖尔芳特（I. M. Gel'fand）、索伯列夫（ S. L. Sobolev）与拉迪任斯卡娅（O. A. Ladyzenskaja）等大家撰写的泛函分析、偏微分方程的介绍。此外，该书在出版前还曾预印 350 份征求过前苏联数学界的意见。这套书影响较广，中文译本由多人合作翻译于 1958 年出版。

按柯尔莫哥洛夫的原计划，要有两套书，第一套书是“反柯朗（Anti-Courant）”[27] 的，要以生动的方式介绍高等数学的要义，其目的是使得苏联公众更好地了解数学各学科的内容、方法、发展历史和现状，特别对将以数学为职业的学生有指导作用。另一套书给程度更深的读者，甚至包括职业数学家，以帮助数学家们了解、预测数学未来发展的趋势。这套《数学的内容》即是第一目的的产物。

如同《数学是什么》有柯朗的文章“数学是什么”，《数学的内容》的第一章是亚历山大洛夫撰写的长达 70 页的“数学概观”。《数学的内容》比《数学是什么》有更广博、更现代的内容，如概率论、方程等主题。但《数学是什么》并不因没有这些内容而陈旧。其原因恰如斯图尔特在其所作的序言中所说：

> “这本书写得好，是因为尽管数学一直在发展，但书中选取的、有关历史上的著名发现的专题，都是很难抛弃的。……《数学是什么》这本书没有过时，是因为所选取的材料展示出了无限完美的数学品位。”

另外，《数学的内容》不适合初学者作数学训练之用，而更适合有一定数学水平的读者来了解数学的全貌。冬、夏定期来访我导师的一位国立莫斯科大学的教授（和我共用办公室）就曾对笔者说过他曾通过《数学是什么》来训练自己，而《数学的内容》更像是一本“哲学”书。

10 合作纠纷

柯朗与罗宾斯的合作对书的完成是有益的，但最终成书后的结果却使得这段合作蒙上了阴影。

关于两人的合作，按罗宾斯的叙述[9]是：1939 年到 1942 年他的年薪是固定的，只有 2500 美元；而且那时没有研究基金资助。到纽约任教后不久，柯朗对他说：“我得到一小笔资助来将一些过去的教学资料整理成面向公众的数学书。你是否愿意帮我？我可以给你 700 到 800 美元的报酬。”额外收入和传播数学思想给初学者的想法使得罗宾斯开始了与柯朗的合作。在邀请罗宾斯参与写作前，柯朗有不少助手，包括他的儿子，帮他整理该书讲稿；而柯朗则用洛克菲勒教育基金会的资助作为他们的报酬。但罗宾斯和柯朗的合作最为紧密，罗宾斯也常去柯朗家交流。有段时间罗宾斯甚至搬到了柯朗在新罗彻里（New Rochelle）住所的附近，以便柯朗不忙的时候可以一起工作。而随着书籍撰写的进展，罗宾斯意识自己需要花愈来愈多的时间来写书，而这样会影响自己的研究生涯。毕竟，对一位年轻的数学工作者来说，其前途不能依赖于撰写这样的普及读物。另一方面，柯朗则认为罗宾斯的帮助很有益，从而提出一起署名而不再给罗宾斯支付报酬。这样罗宾斯作为作者也就更加用心写作了。罗宾斯同意了，因为他也很喜欢这项工作。

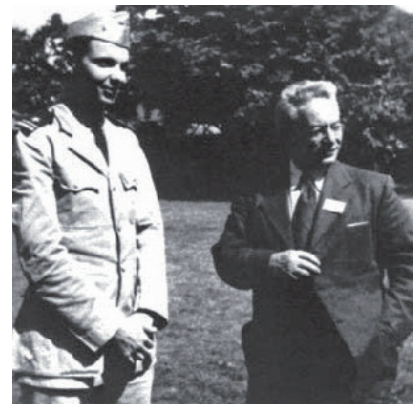

图 8 柯朗（右）与罗宾斯

但瑞德对此曾质疑罗宾斯[8]：柯朗真是这样说的吗？许多人在离开柯朗办公室时根本不清楚他在喃喃自语之中究竟作出了什么决定。

成书前柯朗从没有给罗宾斯看他单独撰写的序言，序言署名也是柯朗一人；外文书中常见的致谢页（“DEDICATED TO”）上也没让罗宾斯

[27] Shiryaev 在其序言中[26]使用“Anticourant”一词；罗宾斯在对他的采访中[9]使用“Anti-Courant & Robbins”一词。

参与，柯朗将此书献给他的四个子女。直到罗宾斯自己去印刷商那里看清样时才惊呆了：书名页上没有自己的名字。

这种做法或许是早年德国数学家的习惯，也是柯朗自己受到非议之处。例如，柯朗和希尔伯特共同署名的两卷本《数学物理方法》的第一卷主要是柯朗写的，希尔伯特只在书的表现形式上出力；而柯朗的助手弗里德里希斯为第二卷（主要是第七章）的写作尽力不少[8]。通过一番交涉，柯朗同意将罗宾斯的名字加上。期间的斗争定是不愉快，罗宾斯的导师惠特尼甚至曾私下表示“若柯朗一意孤行，就将其驱逐出（美国）数学会”[8]。因为柯朗的运作，这本书的版权归属于柯朗。所得版税，柯朗每次只是寄一小部分钱给罗宾斯，至于究竟这本书总共卖出多少，罗宾斯也被出版社拒绝告知。

无疑，一开始是柯朗在策划将自己的笔记整理成这样一本书，希望比自己其它出版物更多地表达自己对数学的观点和看法。罗宾斯是一位优秀的作家，他在这些稿件的改进和扩充方面花了很多功夫，使得全书生色不少。数学家在合作成果中讨论谁的贡献占多大比例是不幸的。曾经亲密的合作以不愉快结束也令人嗟叹。这些足以使人引以为鉴。

11 内容简介

《数学是什么》内容广博融洽。笔者仅仅作一粗略介绍，希望能够吸引没读过这本书的读者。

书的开篇是柯朗撰写的短文“数学是什么”，表达了柯朗对数学的观点。书末附加了一般参考书籍以及各章节的参考资料。有经验的数学读者往往对参考文献感兴趣，这不仅记载了前人的贡献，还为读者进一步阅读指出了途径。例如，本文所提及的书《数学人物》[9]（在新版中出现），《论数与形》也都在《数学是什么》的参考书目中。英文版中列有的名词索引也对读者很有好处。

书的一个重要组成部分是可能被读者忽视的习题。作者不但在章节中配置了适量的习题，在全书的最后还附加了更多评注、问题和练习。这些习题有难有易（对较难的问题，特别用符号 * 标出），需要一定的思考，不是作者反对的空洞的解题训练。习题，尤其是对数学学习，是必要的。它们可以训练数学能力，检验阅读效果，防止读得过快带来的一知半解以致最终读不下去。这些习题，即便不能完全解决，尽力思考一下，也是很有益处的。

《数学是什么》新版共九章。前面八章是柯朗与罗宾斯的原作，未加修改。其中分别讨论了：自然数、数系、几何作图和数域、（初等）几何学、拓扑学、函数和极限、极大与极小、微积分。第九章是由斯图尔特补充的，分节讨论了前面讨论过的一些问题的最新进展，例如费马大定理、哥德巴赫猜想、四色定理等的研究现状。斯图尔特的某些介绍可能稍显“讲得太多”，有违柯朗、罗宾斯的本意，毕竟将一本普及性的图书内容限制到合理的范围也是一种艺术。例如，Blank 即在其书评中批评斯图尔特介绍黎曼猜想、维数理论和分形过多。

数是近现代数学的基础。因此第一章即介绍自然数（指正整数）。从第一节的第一小节就可感知全书的风格：这一节温习了我们熟知的整数加、减、乘法，但我们可以看到一个数学家是如何看待这些内容的。在第一节中作者还介绍了整数的表示，这里我们可以了解常用的十位进制以及更一般的位进制的数学原理。作者还举例演示如何计算七进制下的整数加法和乘法。这一章中另介绍了数学归纳法、等比、等差级数以及二项式定理、不等式等。这些可以作为高中生的课外读物。在第一章的补充中有不少篇幅介绍“数学的皇后”——数论，如高斯的素数分布定理以及同余理论初步、毕达哥拉斯数和费马大定理等。笔者至今仍记得第一次读此书，读懂这一章中欧几里得关于有无穷多个素数的经典反证法以及求最大公约数的辗转相除法时的欣喜。

第二章中作者介绍了数系的构造。有理数、无理数和复数是中学阶段的基本内容。但其坚实的逻辑基础的建立却并不遥远。作者使用了较多的篇幅介绍有理数——作为测量手段的有理数、数的扩充的内在需求以及有理数的几何表示。作者从不可公度线段角度介绍了无理数，还从几何级数、循环小数等我们熟悉的对象向读

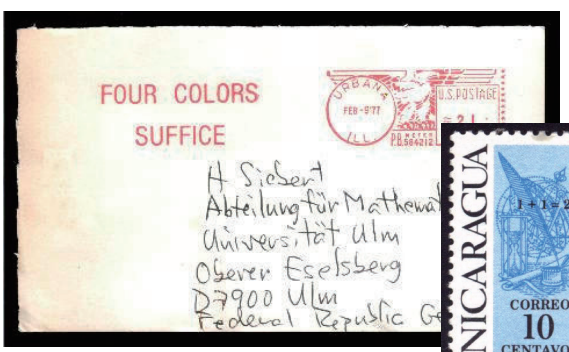

图 9　伊利诺依大学外寄邮件上带“FOUR COLORS SUFFICE（四色够了）”字样的邮戳——这是 1976 年，黑肯（Wolfgang Haken）与阿佩尔（Kenneth Appel）宣布用计算机辅助证明了四色猜想的独特方式

图 10　尼加拉瓜 1971 年发行的系列邮票“改变世界的十大方程”之一“1 + 1 = 2”：用手数数

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	11	13	15
3	3	6	12	15	21	24
4	4	11	15	22	26	33
5	5	13	21	26	34	42
6	6	15	24	33	42	51

图 11 《数学是什么》第一章中的七进制乘法表——“六六乘法表”（如果您好奇这是怎么来的，就去读下这本书吧）

图 13 德国画家丢勒（Albrecht Dürer , 1471-1528）的透视画法机

者介绍极限。书中还介绍了定义无理数所用的区间套原理和戴德金分割方法。至于书中关于无穷的讨论，如有理数的可数性、集合的对应、康托关于集合大小的理论以及数的连续统等都是饶有趣味的。书中还进一步介绍了解析几何、复数、代数基本定理以及代数数和超越数等概念。例如本章最后关于 $2^{\sqrt{2}}$ 是否为超越数（即是整系数代数方程的根）的希尔伯特问题就能吸引读者。这一章还单独讨论了非直接证明（非构造性推理）、无限的悖论以及数学的基础，从此也可看出作者阐述数学思想、方法的兴趣。

第三章中几何作图部分可能是每一个念过初中的朋友都感兴趣的（作者甚至介绍了有趣的仅用圆规作图问题）。1796 年，年仅 19 岁的高斯的第一个发现——正 17 边形（更一般地，边数为费马数的正多边形）可以用尺规作图的故事是即便对高斯也是激动的，高斯从此选择以数学为职业[28]。而著名的三大尺规作图不能问题：

1. 将任一个给定的角三等分；
2. 立方倍积问题：求作一个正方体的棱长，使这个正方体的体积是已知正方体体积的二倍；
3. 化圆为方问题：求作一个正方形，使它的面积和已知圆的面积相等

则曾是千年难题。特别是化圆为方，因为方圆的完美性，同时又有着肉体、精神等的象征，更是激起人们的兴趣。

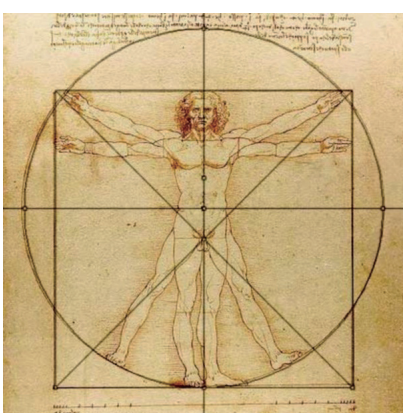

图 12 不限于尺规作图，达芬奇知道如何化圆为方。图为达芬奇绘制同时嵌入圆形和正方形中的人体图像——维特鲁威人

但数学家的眼光不仅在作图，而是着眼于图与数的关系。确实，三大几何作图不能问题的严格证明依赖于代数方程的解。如果不懂这些，就会有人盲目地浪费精力去寻找解法。事实上，在《近代数学概观》第二册中增补有余介石长子余宁生口述的对 30、40 年代“我国之三角分家及方圆家”提供的所谓解法的批评。重温该文“尾声”中一段引用不无裨益：

“有些人以为数学家之所以不能化圆为方等等，乃是因为工作太难的缘故。有了这个念头，当然想要自己去解决问题，以便打倒一切数学家，出人头地。总之，一切麻烦都因学识不够，竟不知是不可能之事，真是可惜。”

书中认真分析了用尺规可以做出哪些量来，讨论了正五边形的作图，介绍了为何不能一般地解决角三等分问题，为何正七边形不能用尺规作图等。我们还可以了解到“化圆为方”是尺规作图不能问题的证明是直到 1882 年德国数学家林德曼证明 π 是超越数才得到的。

第四章是射影几何、非欧几里得几何等的介绍。很多内容对高中程度的读者是适合也有吸引力的。这些内容之间也有联系。例如，射影几何和非欧几何在对平行线的处理上各有特点。为了使读者感兴趣，我们简单介绍一下书中占有一定篇幅的射影几何学以及笛沙格定理，至于书中介绍的相互对偶的帕斯卡定理（帕斯卡 16 岁时发现、莱布尼兹称为“神奇的六边

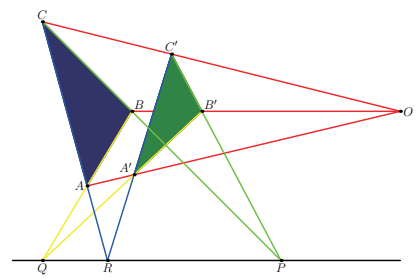

图 14 笛沙格定理

[28] 常见讹传指高斯的墓碑上刻有正十七边形的图案。事实是，墓碑上没有；但高斯家乡不伦瑞克高斯纪念雕像底座侧面刻有正十七角星。

形定理”）、布列昂匈（Brianchon）定理就留待读者自己去学习了。

射影几何学的研究起源于达芬奇、丢勒等人的透视画法，盛于18世纪末，特别基于法国大革命中建立的巴黎综合理工大学对几何学的兴趣。这所学校的学生彭色勒（J. V. Poncelet, 1788-1867）在俄罗斯人的监狱里写下的论文奠定了射影几何学的公理系统，从而使得射影几何学得以完全建立。

每一种几何学都主要研究在特定变换下的不变量和不变性。作者也是希望向读者传达这一高观点。射影几何研究经过射影变换后不变的图形性质。法国数学家笛沙格（Gérard Desargues, 1591-1661）在笛卡尔和费马创立解析几何的同时期开启了射影几何学的研究。笛沙格发现了射影变换下的不变量——交比，还发现了如下以他名字命名的定理：若三角形 ABC 和三角形 $A'B'C'$ 对应顶点的连线共点，则对应边的交点共线；反之也对。

平面射影几何学和平面欧几里得几何学的最大不同在于射影几何学里承认无穷远点；认为平行线相交于无穷远点，平面的无穷远处是无穷远直线（类比林则徐的名联中的：海到无边天作岸），而不同的平行线组的交点（无穷远点）都在无穷远直线上。因为共线是投影不变性质，对应边平行这一特殊情形的笛沙格定理也成立——交点都在无穷远直线上。该特例是不难证明的；而射影几何的妙处在于，我们可以通过证明这一特例来得到一般证明——正谓“此时无穷胜有穷”[29]。

第五章的拓扑学可以看作上一章的延续，研究的是比投影变换更任意的压缩、扭曲等变换下还保持不变性质的“橡皮科学”。拓扑学是罗宾斯博士研究的专长，也是他要求开辟这一章的。书中介绍了欧拉的多面体公式、四色定理、维数概念、不动点定理以及莫比乌斯带等内容。我们不一一详叙。很有特点的是书中介绍了五色定理的证明以及代数基本定理的拓扑学证明。

第七章是极大与极小问题。这样的问题有应用背景，自然是很有意义的。费马引入导数的论文就是以求极大极小为题的。笔者当时读到最速降线问题，见到其解法之一可以类比中学学过的折射定理时，感觉如醍醐灌顶。我们稍详细聊聊本章中介绍的等周问题。粗略地说，等周问题研究具体空间中已知表面积的封闭曲面（或已知周长的封闭曲线）如何围出最大的体积（或面积）。这是一个古老而又年轻的问题。两千余年前的欧几里得就已经证明了在所有等周长的矩形中，正方形的面积最大。现代数学中，人们也将等周问题称为迪多（Dido）问题，则是因为下面的故事。前814年，泰尔王国（今黎巴嫩西南海岸）的迪多公主为免迫害，携财宝与仆人登陆突尼斯湾。她向柏柏人首领借一牛皮之地；却将牛皮切成细条并连在一起，以海岸线为直径圈出半圆以获得最大面积。这就是迦太基城，迪多自任第一女王。这表明迪多女皇已经知道平面上的等周定理：在平面上所有周长一定的封闭曲线中，圆围出来的面积最大。这也是历史上许多城市的城墙或外形近似圆周的道理。但其证明却不易。首个较完备的证明直

图15 巴西1967年发行的邮票，是最早以莫比乌斯带为内容的邮票。在整体上，莫比乌斯带为单侧曲面

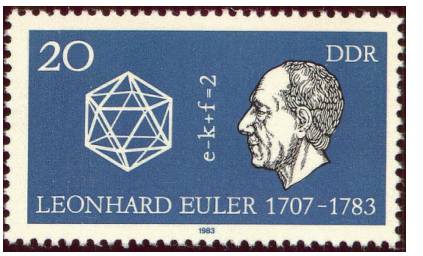

图16 前东德在欧拉逝世200周年纪念时发行的邮票。邮票上有欧拉的头像和他发现的多面体顶点、边、面（分别记为 e、k、f）之间的关系公式 $e-k+f=2$

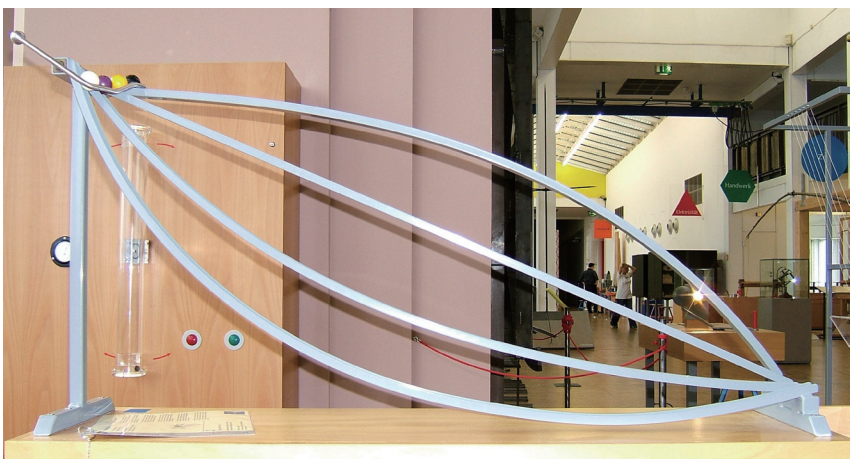

图17 极大极小问题的经典问题之一：最速降线问题（一个质点从等高处沿着什么样的曲线下降所需时间最短，图为德国曼海姆市技术劳动博物馆展品）

[29] 引自冯克勤编著《射影几何趣谈》，上海教育出版社，1987。

图 18 迪多女皇割牛皮圈地

到 1838 年才由雅各 • 史坦纳（ Jacob Steiner, 1796-1863）给出。证明中所用到的如对称化的思想，在书中有仔细的介绍，不难理解且重要。该问题的推广，如考虑球面上、高斯空间（平面上的勒贝格测度换为高斯测度）的等周问题及其和泛函不等式之间的联系都是研究热点。如球面上的等周不等式（球冠为最优等周域）还是由著名的概率论大家勒维（ Paul Lévy ）发现。类似的问题还很多，知名的有如蜂窝猜想等。

为解决极值问题，书中介绍了肥皂膜实验。这不仅仅是为着使读者感兴趣，柯朗恰在做研究时也玩肥皂膜实验。事实上，肥皂膜实验中出现的数学问题，至今还是数学家研究的对象。例如，两个或多个肥皂膜在空中相粘的数学理解。

第六章论述函数和极限这些分析的基本内容。这是整个微积分的基石。因此作者花了不少笔墨来介绍。比如，极限这一概念就讲得很详细。 第八章以不长的篇幅，介绍了微积分的精华。其讲述也别出心裁，与大多数现行教程不同的是，这里先介绍积分学，后介绍导数。这和历史发展的顺序也类似，积分的概念在古代就已有萌芽，但导数的概念却是 17 世纪才出现的。

作者在介绍积分时，耐心地逐步推进：以简单积分如三角形、弓形面积的计算为例，以分割、求和、取极限的程序，只用到等比级数求和这一技巧，演示如何根据定义计算积分。如果要初步了解微积分，这本书的讲法是很好的例子：用面积观点介绍简

图 19 柯朗与同事在做肥皂膜实验

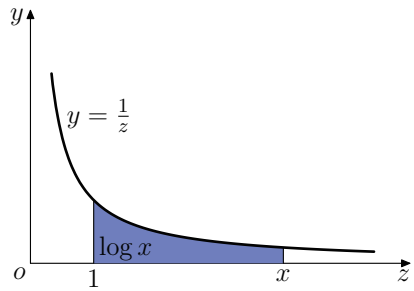

图 20 对数函数定义为双曲线下的面积

单函数的积分，再用面积变化来讲解导数。

在微积分的应用方面作者也别具匠心。如书中介绍了数学家们熟知，而或许一般初学者不幸未能从课堂获得的一个“秘密”：

$$\log x=\int_1^x \frac{1}{z}dz,\ x>0\ 。$$

即将对数函数 $\log x$ 定义为曲线 $z \mapsto y = 1/z$ 下从 $z = 1$ 到 $z = x$ 的面积。这样的好处是对数函数可通过简单的函数来定义，同时对数函数的诸多性质都变得清晰。例如，中学可能不介绍的基本不等式 $\log x \le x - 1\ (x > 0)$ 就可通过面积的比较而得到直观理解。更重要的是，由此还可以定义指数函数 e^x 并自然地得到基本极限

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ 。$$

学习如此的一些“见识”是阅读名家书籍的一大乐趣。比如，阅读柯朗的《微积分与数学分析引论》，读者可以学到阿诺德在其《论数学教育》中提到的所谓“秘密”：矩阵行列式的几何解释为矩阵各列构成的平行多面体的体积。

12 适合读者

作者在书的前面写有“本书用法”，介绍了哪些读者可以从中获益。我们且做些有所重复的介绍。

程度较好的高中生学习《数学是什么》不会感觉太大困难，基础稍弱

的学生有所选择或在有人指导的情况下也能入手。一些内容，如几何学、肥皂膜实验等内容可以作为初中生的课外兴趣。又如射影几何学平行于欧几里得几何学，有趣又不难理解，适合高中程度的学生独立学习。如果有朋友想赠书给高中毕业的学生，我推荐这本书。事实上最近德国编有给高中毕业生阅读的数学科普图书，这本《数学是什么》中有关素数分布的定理和拓扑学的内容就被收录其中。

自然，中学教师也能从书中学到不少东西，而且还可以用它作为参考书辅导学生。柯朗在其“本书用法”中就提到“高中教师在指导高材生或指导课外活动小组时，从几何作图和极大极小等章中，可获得许多有益的材料”。

该书更是大学生很好的课外读物，一方面书中关于极限与函数、微积分的论述可以作为大学生学习分析的参考，因其中有清楚的阐述和独到的见解；另一方面还可以了解到现行的普通教学中没法获得的数论、拓扑学等内容，毕竟一般大学课程中不会覆盖这么广的内容。大学教师也可从书里摘取到丰富的例子用于课堂教学。即使对数学专业的学生，书中的素数定理等内容似乎也不是每所大学都会教授。或许现今许多学校针对广大大学生的数学通识课程可以采用该书作为教材或参考书。确实曾有一些教师在大学课堂使用该书。

笔者尤其推荐大学一、二年级非数学专业的学生阅读此书。因此我们继续介绍书中两个对课堂上都要学习微积分的大学生有所启发的例子。

我们知道在历史上 π 的计算是数学水平的象征。因此莱布尼兹的 π 公式

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

就显得很重要。在学习了微积分基本定理之后，可由

$$\frac{\pi}{4}=\arctan 1=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$
$$=\int_0^1(1-x^2+x^4-x^5+\cdots)dx$$

再从 $\int_0^1 x^m dx=\frac{1}{m+1}$ 以及不难的余项估计即易得到上述公式。这表明 $\pi/4$ 可以解释为曲线 $y=1/(1+x^2)$ 下，横轴上方，从 $x=0$ 到 $x=1$ 的面积。这在《数学是什么》中都有介绍及证明。

另举一个微分的小例子。书中在介绍了多项式函数 x^n 的高阶导数后，指出二项式定理（在书的开始不久即介绍了）有一个更简单的方法证明，即考虑函数 $(1+x)^n$ 关于 x 的在 0 处的各阶导数。

13 美如文学

历来有人将数学比喻为艺术，那么数学书就该是艺术作品。著名数学家阿蒂亚爵士在对年轻数学家的忠告中特别指出数学写作的重要性[30]：“数学也是一种文学形式。…… 写得好的论文会成为经典，将被未来的数学家们广泛阅读；写得不好的，不是被遗忘，就是在其结果极重要的条件下被重写。”确实，莫尔斯就曾称赞《数学是什么》说“本书就是一件艺术作品”。

亚马逊网站对该书有如下描述（主要部分亦见斯图尔特在增订版中的序言）：

“形式数学（formal mathematics）就像拼写与语法——只是对局部规则（local rules）的正确使用。有意义的数学（meaningful mathematics）有如新闻工作——它只讲述有趣的故事。但它又不像某些新闻报道，因为它的故事必须真实。而最美的数学（the best mathematics）则如文学——它将故事栩栩如生地呈现于你眼前，使你在理智上和情感上都情不自禁地投入其中。《数学是什么》就是一部精美的文艺作品——它为每一个渴望欣赏数学世界的人推开了一扇窗户。”

这本书写得优美或许和作者之一的罗宾斯青少年对文学的喜爱有关。罗宾斯曾在其采访中[9]与《数学的内容》作比较，说：

“当我看到该译本时[a]，我第一次意识到我们的书《数学是什么》真是一本多好的书。他不是由一个委员会来编写，……。它只是由两个人就一个他们各自以之为终身事业的课题，通过紧密的合作来完成的。当我开始撰写这本书时，我才 24 岁，刚获得博士学位才一年。他代表了我之所学，我之所期，以及我将立身之处。对柯朗而言，这是他作为数学家和研究所管理者和推动者的一生中所拥有的多姿多彩经历的总结。我们代言了一个不复再来的特殊年代（1939-1941）。现在是不可能写这样一本书了；数学已经发生了很大的变化，数学事业的特点也如此不同。我倾向于将《数学是什么》看作是一部文学作品而非科学作品。它有着牛顿和莱布尼兹发现微积分时代肇始的法国文化圈之传统。那时，没接受过正规科学教育的人们渴求理解这些概念；沙龙流行，哲学家发表演讲，给名流讲授微积分。《数学是什么》有着法国人所谓的高等通俗化（high vulgarization）的传统。”

[30] 参 *The Princeton Companion to Mathematics* VIII. 6, 可见 http://press.princeton.edu/chapters/gowers/gowers_VIII_6.pdf。

[a] 指《数学的内容》的英译本 *Mathematics: Its Content, Methods and Meaning*, 1963 年由 MIT 出版社出版。

图 21　滥觞于沙龙的法国科学院

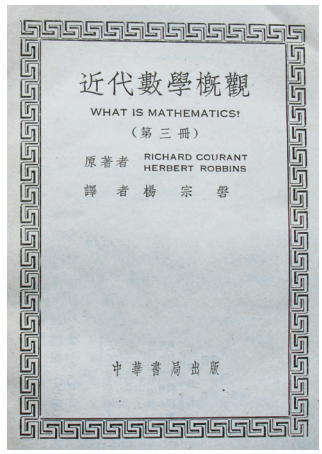

图 22《近代数学概观》第三册标题页（笔者藏书）

中译者也对此书的文笔有所赞誉。吴英格等的译本指该书“内容精辟深入，文笔则飘逸谨严，兼而有之；令人不读则已，一读就非一气读完不可”。左 / 张译本的序言中说：“它不仅内容丰富，而且文笔流畅，阐述精辟；既直观易懂又严谨深刻；使人读时爱不释手，读后回味无穷，确实是一本深入浅出、引人入胜的难得的佳作。”

在我看来，对初学者，“一气读完”是有难度的；但有选择地阅读，是可以被吸引的。我当时阅读这本书，有如年少的我初读《史记》。我当时对《史记》的文字虽不能完全通晓，但得其大意，有如我对《数学是什么》的体会。读这两本书时，看着快翻完的书，都曾感慨：好书不再，奈何快“读”完了！

《史记》既是史学巨著，也是文学杰作，所谓“史家之绝唱，无韵之离骚”。有些相似的是，《数学是什么》讲数学的同时，文字也很好。《史记》文字简洁生动，同样，《数学是什么》最大的特点或许就是以简洁生动的文字概览了近代数学的基石、架构、历史、思想和方法等内容。这恰如著名数学家丘成桐先生在其演讲[31]中所指出的：“数学的文采，表现于简洁，聊聊数语，便能道出不同现象的法则。”

14 中译介绍

我们先介绍最早的中文译本《近代数学概观》。汪 / 朱译本的译者序中只有一行字提及该译本——作者感谢“李运樵副教授提供文言文译本”。由此可见，汪 / 朱的翻译或参考了《近代数学概观》。

左 / 张译本说该译本“流传不广”，“部分章节文字较艰涩”，“且不少术语与目前通行的不尽相同”。《近代数学概观》确实流传不广，甚至查询得知中科院图书馆都收藏不全。但高中水平的读者是可读懂全文的。有兴趣的读者可以找到 2009 年哈尔滨工业大学出版社出版的《世界著名平面几何经典著作钩沉：几何作图专题卷（上）》，其中第四编即为余介石 / 杨锡宽翻译自《数学是什么》的《几何作图题及数域运算》[32]。

笔者暂只找到余介石、杨宗磐相关资料，简介如下。余介石（1901-1968）是著名的数学教育家，曾在四川大学等高校任教。在上世纪初他和赵淞、傅种孙三教授被誉为“三大中等数学权威”，对振兴现代珠算有重要影响。他曾到故宫以放大镜从古画中寻找算盘，并最终在《清明上河图》找到。此证明珠算在宋代即有使用。

而杨宗磐（1916-1976）于 1941 年毕业于日本大阪帝国大学理学部，曾任北平师范大学讲师、北京大学副教授。建国后，历任四川大学、北洋大学教授、南开大学等高校教授。华罗庚在其《高等数学引论》的序言里曾致谢写作过程中参考过的著作，其中就有杨宗磐 1958 年著的《数学分析入门》。

综合前文及附录，我们知道老一辈数学家如朱公谨、余介石、吴大任等对国外名著的译介。其意义，我们引用著名数学教育家、中国数学会第一任董事会主席胡敦复与吴在渊合著的《近世初等代数学》一书的序言中的话“自立之道奈何？第一宜讲演，第二宜翻译，第三宜编纂，第四宜著述”来说明。

下面我们主要考虑汪 / 朱和左 / 张的译本，因为它们对大陆读者而言最常见。特别是左 / 张的翻译增订版添加了新的内容得以再版，读者很容易得到该书。

从译者的经验判断，这两译本的数学内容的翻译都该是值得信赖的。张饴慈是首都师范大学的教授，热心数学教育，近年积极从事新国家课程标准高中教材（北京师范大学版）的

[31] 见丘成桐在浙江省图书馆的讲演：《数学和中国文学的比较》。

[32] 该书第二编也是余介石翻译的《几何作图题解法及其原理》。

建设。笔者曾在与张饴慈、张丹两位老师的讨论下，执笔撰写概率论部分选修教材初稿。左平是张饴慈的同事。如前脚注，左平翻译这书前曾翻译了托普利茨和拉德梅彻的名著。汪、朱中笔者只通过网络粗略了解到汪浩教授。汪皓生于 1930 年，毕业于清华大学数学系，曾在哈军工从事数学教学工作。哈军工的数学教学异常严谨，锻炼了一些数学人才。汪浩后到长沙国防科技大学任教，曾任政委，少将衔。除《数学是什么》外，汪浩也编译过一些其他书籍。他写有一本普及性读物《数学与军事》[33]，也很有意思。

当然，翻译要做到十全十美是不容易的。1996 年英文新版第 512 页的最后一行中所提的数学家“Fang Chung”应为“Fan Chung”，她是 1949 年出生于台湾的美国著名女数学家金芳蓉。这个失误实际上在 Gillman 的书评[34]中已经指出。而左 / 张译注的增订版中对此却没有更正，中文名字也只“芳蓉”——不知译者是否知道这其实就是人称“台（湾）大（学）数学系四朵金花”之一的金芳蓉。

从语言的角度，两个译本各有利弊。汪 / 朱译本的文字较典雅，但有些地方可能会使初学者略觉生涩。而左 / 张译本的语言则平直、通俗易懂。然而左 / 张译本对一些人名的翻译和我们现在习惯的译名不同。如著名数学家“Pascal”的名字被译为“巴斯嘉”，而非常用的“帕斯卡”。但此译本在译名后用外文加注所以问题不大；若书后能列出人名翻译对照一览表就更好了。相比汪 / 朱的译本中外国人名的翻译一般都符合我们现在的习惯，且书末列有人名翻译对照。

左 / 张译注的版本中有些翻译较灵活，但有的灵活可能会显得不必要。如将原书中以自然数为底的对数符号 log 改成了中国读者较熟悉的 ln；将算术级数、几何级数翻译为常用的等差级数和等比级数。但实际上，算术级数、几何级数的叫法无什么不妥，而用 log 取代 ln 也是被广泛接受的。

这两译著的一个共同缺憾是都没有能在书后附名词索引及对应页码，在原版中这是有的。而且其它三个中译本都有关键数学术语的中英对照和索引。对这样一本内容广博的书，索引很有利于读者。虽然索引的编制在以前可能颇费工夫，但现代利用计算机，应该极易。此外，两译本都省略了原版中很有价值的参考文献，只是左 / 张译本的新版本有所进步，附加了参考文献。

15 个人经验

我是在 1994 年初中毕业后的暑假中读到《数学是什么》的。现在资讯易得，图书丰富，获悉得到《数学是什么》一书的机会很大。然而我当时读到这书是极偶然和幸运的。这或和我 1994 年入读高中前乏书可读而又喜爱阅读有关。

我们能从不少文学作品中了解到中国六、七十年代书籍的匮乏和人们对读书的渴望。我的家乡是革命老区平江县幕阜山脚下的一农村，我少年时代能得到的书籍也是极少。而电视机也远没普及，观看少时流行的《西游记》、《霍元甲》都得相约跑老远挤到别人家看。因此读书是不多的消遣之一。家里唯一的藏书是四本《毛泽东选集》（五卷中缺第四卷）——其实家里人是不读书的，但家里有此宝书也不很奇怪，或与祖父“富农”身份有关。镇上的新华书店门可罗雀，书不少，但都束之高阁——一直闭架售书，随便进去翻书是不可能的。现在家乡虽然物质丰富了，阅读的环境可能不如从前。这家新华书店也已被改成了几层楼的宾馆。

上高中前我极少购书经历。当时农村的长辈是没有习惯也常没余力给子女买书的。我幼时曾常随祖父街头卖菜，一次到邮局，或看在我喜欢，或是邮局工作人员介绍，祖父给我买了两三册几页纸厚的小画册。其情景和我回家后翻阅图画的片段依稀记得。我少时镇上的综合门市部玻璃柜的一角往往有一些书出售。常光顾那里，也零星买过便宜的连环画。为了看价格，常常要俯身瞄书下的定价以及看是否盖有带“半价”字样的矩形红戳。一些如东周列国故事的连环画常常半价——大约 8 分钱一本。一次从镇上回家的路上见到地摊卖私自印刷的小册子，还跑回去自作主张向在镇上摆摊的邻居借钱两毛七购得最薄最便宜的《增广贤文》。也还曾有一次悄悄地取家里的钱买了一本《河北武林故事》，花费约 1.5 元。其实想买一直挂念着的较厚的《三侠五义》，但担心太贵又不敢问价格，只好匆匆买下这本稍薄的。稍长后还买过黄自元临的《九成宫碑醴泉铭》。

当时的农村虽然表面上似乎没什么书籍，但通过交流，还是能读到不少书！如小学时能从邻居处借到连环画、《故事会》和《少年文艺》之类的书籍。初一的邻桌是镇上高中（四中）校长的公子，借给我刚出版的高中生读本《世界之瑰宝 民族之骄傲》，近 600 页，我翻看过很多遍，其中关于中国书法的介绍印象尤深。我知道有人也曾以此书为文化启蒙读物。更不用说能借到不少当时流行的武侠小说。通俗演义如罗通扫北以及唐代薛仁贵几代人征东、征西至后来的薛刚反唐，历史小说如清代康熙、乾隆的故事，以及以前的启蒙读物如《幼学琼林》都能从不同地方借阅。还记得我读到的第一本宋诗读物是来自邻居家的，而邻居借自其亲戚。还读过后来才知是名著的《水浒传》、《三国演义（下）》等。也借到过文革资料汇编、

[33] 1989 年，湖南教育社出版；2008 年，大连理工大学出版社。

[34] What Is Mathematics?, book review by Leonard Gillman, The American Mathematical Monthly 105, 5 (May 1998), 485–488。

图 23 平江一中校前的彭德怀雕像和天岳书院

繁体竖排的《唐诗三百首》、一册雕版印刷线装的《古文辞类纂》。现在想来，这些书在农村的流传真是奇迹。但这也使得我一点也不奇怪于几年前的新闻——我们同镇的五角村延续着中国最后的私塾。

没书读时，我曾经翻新华字典，特别是乐于翻阅从舅舅家借来的《汉语成语小词典》中的历史故事。我也开始读家里的《毛选》。先是无意中看到书中所附注释——如孙猴子变尾巴为寺庙旗杆的故事——而感兴趣后翻阅全书，里面的文章确实“好得很”。中学教材我也拿来当课外书读。如《语文》课本后教师从不提及的诗歌；一年春节，我还曾捧着厚厚的《植物学》教材读，琢磨其中知识间的逻辑，其味无穷。

当时农村中学很多成绩好的学生，除了个别学习好父母是明白人的（如少数教师子女），知道是要读高中考大学的外，其他的都去念中专[35]了，似乎这是最好的前途。而其时的中专报考有名额限制，因此也只有成绩名列前茅的才有资格。我也不例外随潮而去报考中专了，事实上我并不清楚大学为何物，而周边考上中专的先例是有的。但那时县城的一中希望有好的学生入读。从我们那一届开始，据说还县人大举手表决过，全县中考前 60 名的都得无条件转去一中读书。我就这样被“截留”了。

入读高中前的暑假，我们这 60 名“截留”生被免费邀请到县城的一中[36]去补习。“断送我们前途”的校方似是有所歉意，补习结束前慷慨同意同学的要求，让我们每人从图书馆借两本书回家。所谓图书馆就只一间图书室而已；但我是第一次见到图书馆，和一群同学一路小跑去挑书。我无意间瞥到一本崭新的黄皮《数学家传》，然后又看到较旧的很厚的《数学是什么》（红色封底的汪 / 朱译本）。因为只能借两本，匆忙中厚书吸引了我，就取了《数学是什么》——其实我当时对数学并无偏好，但也不了解其它该读的名著，只是希望不容易读完，附带取了那本崭新的《数学家传》。

将书带回家后，发现《数学是什么》虽然很新鲜——我如发现一个新的大陆。但书却很难读，也无人指导。如同余理论我也就只能看懂开始的入门介绍，至于高斯的二次互反律是没读懂。书上留有先前读者用漂亮的钢笔小行书作的批注，我敬之为天人，竟有能读懂此书的人！进入高中后，我也写条请求图书馆管理员帮我找出该书来再读过（不再有机会亲自挑书，而该书也不在书目中），如几何作图、射影几何等还认真地做笔记。高二时将微积分部分囫囵吞枣地看完了。

我从《数学是什么》获得的数学训练，比这书能提供的，要少得很多很多。这和我贪多求快不正确的读书方法有关。如下的话是我多想当时就有人对我说的：慢慢读，做下书中的习题。读文学书或能“不求甚解”，书读百遍，其意自通。但数学书的美，还是需要下功夫才能体会的。

但这本难读的书对我后来选择以数学为专业还是有些潜在的影响。高中时对书籍之丰全无概念，甚至曾感叹读完《史记》后将无书可读。当然，如《史记》那样的好书也不多。但《数学是什么》这本难啃的书，使我意识到，如果能读数学书，将来无论如何应该不会无书可读，也绝不会孤单。确实，数学书也可如文学书一样放在案头枕边，读读《数学是什么》吧！

现在想来，校图书馆藏有这书可能和地近该译本的出版社所在地长沙有关。一个人喜欢数学或会有很多偶然的机会。而每一个中学图书馆拥有这样一类好的数学普及图书，就会有更多的读者以更大的机会接触到好的数学，从而喜欢数学。我们就以书中介绍的费马大定理的终结者怀尔斯（Andrew Wiles，1953-）的故事结束吧。

话说当年小怀尔斯在图书馆看见一本书，里面有费马大定理的介绍。30 多年后，他回忆：

“它看上去如此简单，但历史上所有的大数学家都未能解决它。这里正摆着我——一个 10 岁的孩子——能理解的问题，从那个时刻起，我知道我永远不会放弃它。我必须解决它。”

[35] 中等职业技术学校，当时中专毕业后算是有铁饭碗了。

[36] 是为彭德怀领导平江起义之处。

图 24　1937 年国立四川大学数学系师生合影，前排右一为余介石教授、中为魏时珍教授、左一为谢苍璃教授（谢亦曾在哥廷根学习）

图 25　1956 年朱公谨教授在上课（照片来源：上海交通大学网页）

16 附：柯朗的两位中国学生魏时珍、朱公谨简介

魏时珍（1895-1992）出生于四川蓬安县，名嗣銮，字时珍，以字行。他在去德国留学前，曾是五四运动前夕李大钊领导的“少年中国学会”的成员。1920 年，魏时珍与同学王光祈（1891-1936，著名音乐学家和社会活动家）从上海乘邮轮赴德学习，在岸上与他们挥手作别的是同为“少年中国学会”会员的毛泽东。他们二人先同在法兰克福学习，后来王先后前往柏林、波恩学习音乐；而魏时珍得知哥廷根是数学的顶级殿堂，于 1922 年考入哥廷根大学，师从希尔伯特、柯朗学习数学。在哥廷根学习期间，他还做过到哥廷根学习的朱德的德文教师。1925 年魏时珍以论文《在平均负荷下四边固定的矩形平板所呈现的现象》获得应用数学博士学位，导师是柯朗。他是第一位在德国获得数学博士学位的中国人。1984 年 6 月，哥廷根大学还向魏时珍颁发了“金禧证书”，表彰他从事的教育科研工作以及为增进中德学术文化交流作出的贡献。

魏时珍在回国前就积极向中国介绍国外先进的知识，如他与爱因斯坦取得联系，向中国人介绍相对论（1923 年）。魏在取得博士学位后于 1925 年回国，积极教书育人。如他撰写了第一本偏微分方程的中文教材——《偏微分方程式理论》教材。魏的这本教材参考了柯朗的偏微分方程讲义。因与本刊主旨相关，我们特别指出魏时珍强调大学教学应该文理相融。他在哥廷根留学期间，与哲学家纳尔逊（Leonard Nelson）交往密切；在任四川大学理学院院长时，即建议各院系均开设文、史课程；文、法学院则应开设自然科学方面的课程。魏自己也深通文理，在 1982 年，他还写了《孔子论》一书。

朱公谨（1902-1961）出生于浙江余姚，字言钧，又名霭如。他和魏时珍同样，出生于书香门第。朱于 1921 年赴德国留学，到哥廷根大学学数学。1927 年他以博士论文《关于某些类型的单变量函数方程解的存在性证明》获得德国哥廷根大学博士学位，导师是柯朗。

朱公谨在取得博士学位后也旋即回国。鉴于当时中国数学基底的普遍薄弱，朱公谨撰写大量普及性的数学著作，特别是自 1934 年起在《光华大学半月刊》上连续撰写“数理丛谈”、“从高等数学的点观谈谈初等数学”、“集论小谈”等序列文章，影响了如冯康[37]、吴文俊[38]等一代人。朱公谨还致力于翻译国外数学著作。他翻译了德国数学家戴德金（Richard Dedekind, 1831-1916）的名著《实数探原》，被商务印书馆列为汉译世界名著。上海沦陷于日本后，滞留孤

[37] 参冯端著《冯康的科学生涯——我的回忆》，科学时报，1999 年 8 月 11 日，12 日，16 日，17 日。其中写道：“还有值得一提的是，有一本科普著作对他产生的深远影响。在高三时期，他仔细阅读了朱言钧著的‘数理从谈’。朱言钧（朱公谨）是我国前辈数学家，曾在哥廷根大学留学，回国后在上海交大任教。这本书是通过学者和商人的对话来介绍什么是现代数学（其中也提到费马大定理、哥德巴赫等问题），这本书有很强的感染力，使冯康眼界大开，首次窥见了现代数学的神奇世界，深深为之入迷。据我观察，这也许是冯康献身数学立志成为数学家的一个契机。”参 http://lsec.cc.ac.cn/fengkangprize/FKscan/Fscan1.pdf。

[38] 胡作玄著《吴文俊》，其中写道：“曾留学德国哥廷根的朱公谨（朱言钧）发表了不少译著，吴文俊几乎每篇必读，这对他的早期数学思想产生一定影响。”见 http://www.mmrc.iss.ac.cn/wtwu/ 吴文俊 .htm。

(a)《柯氏微积分学》(上卷)　　封面 (b)《柯氏微积分学》(上卷)标题页

图 26 朱公谨翻译的《柯氏微积分学》(译者署名朱言钧，笔者藏书)

岛的他翻译了导师柯朗的微积分名著“*Vorlesungen über Differential-und Integralrechnung*”[39]。此即《柯氏微积分学》(上、下卷)，乙酉学社丛书第一集，中华书局 1949 年初版。全书共 951 页，工作量不可谓不大。有兴趣的读者可以在超星网上免费阅读这本书[40]。1952 年院系调整后，朱公谨受教育部委托主持了我国第一部“高等数学”课程教学大纲的制订并编写了《高等数学》教材。

《柯氏微积分学》用文言翻译，繁体横排，颇有文采。只是某些术语的翻译与当今通行的不同，例如书中的“数序”、“有涯”指的是我们现在常说的“数列”和“有界”。但译者知道译名的重要，脚注中分别以英、法、德三种文字加以说明。

约翰曾在《微积分与数学分析引论》的再版(1973 年)序言中一开始即说柯朗的《微分与积分计算》：“极其成功地引导了几代数学家进入高等数学的领域。整套书展示了如下重要的启示：真正有意义的数学，是由直观想象与演绎推理联袂创造出来的。”拉克斯也说这本微积分教程迄今仍是最好的教材之一。如是，其译本自然也受到普遍的赞扬。

香港中文大学前文化研究所所长陈方正(1939-)曾回忆：“我对科学的兴趣是初三那年碰到《微积学发凡》，由这小册子触动的，跟着被中华书局刚刚出版的两卷本《柯氏微积分学》(柯氏即 Richard Courant)激发。此书清晰、严谨、有系统，一下子就把我迷住了。”[41]

“在 40 年代末和 50 年代初，(《柯氏微积分学》)曾是一种模范教本，直到 50 年代大规模引进苏联教材之后，此书才停止发行。”[42]

我们摘录原序的一段翻译用以说明柯朗的微积分教材的意义。

“其最显著者，为微分与积分之混合编述，与一般之先论微分，后论积分者大异其旨。考微积之先后分论，实由于偶然之习惯，殊乏理论之根据，其结果使学者不能直捷触及中心问题，即对于定积分、不定积分及导数之关系未能融会领悟，不可谓非憾事。”

这里讲的是自欧拉之后的微积分教材著作者总是把微分学和积分学分开论述，从而导致微分和积分之间的关系不清晰，直到 1927 年由柯朗延续克莱因的方法而一改风气。

朱公谨也和纳尔逊相知。朱还在纳尔逊去世后不久的 1928 年，著书介绍纳尔逊的生平与学说。[43]

注 1：压题图有《数学是什么》的各(译)版本的封面组成，从上到下，从左到右，它们为：1941 年英文原版、西班牙语译本、越南语译本、俄译本、1996 年英文增订版、德语译本、日文译本、中文 1949 年译本、中文 1979 年译本(台)、中文 1985 年汪/朱译本、中文 1985 年左/张译本、中文 2010-2011 年译本(台)。

注 2：本文部分脚注引用前面的脚注。

德国比勒费尔德和知阁

2012 年 2 月 10 日

[39] 乙酉学社丛书由著名物理学家、教育家、编译家杨肇燫(1898-1974)组织。《柯氏微积分学》书前有杨肇燫撰写的乙酉学社丛书第一集缘起的介绍，其中说：“民国三十有四年之初，抗日战事犹酣，曙光未露，殊深风雨如晦之感。本社同人蛰处沪滨，忧郁隐愤，共相策励，亟思借韬潜之光阴，从事于严正科学之述作，为将来复兴作育人才之准备商略效涓埃之助，而苦于经济拮据，徒有心余力绌之憾。”“缘起”还写道：“佥认为国内文化界中最感贫乏者，莫过于大学所需严正科学之教本；补救之道则莫善于迻译国外名著。盖泰西名家著述既正确可靠，且由经验所积，深合讲授之用；况当前需要至亟，尤须争取时间，为求克期观成，则译述尚焉。”而同人“均抛弃版税，期减轻成书售价，以利读者”。爱国之心跃然纸上。

[40] 上、下卷：http://book.chaoxing.com/ebook/read_11020691.html、http://book.chaoxing.com/ebook/detail_80410171.html。

[41] 陈方正，《陈方正的书单》，2010，参 http://www.infzm.com/content/50601。

[42] 冯倩，《中国近代的数学先驱——记数学系首届主任朱公谨教授》，参上海交通大学网页 http://math.sjtu.edu.cn/xiaoyou/old/alumni_news/alumni_news_7.htm。

[43] 1928 年商务印书馆出版的《理性批评派的哲学家纳尔松(他的生平与学术)》。此书书名页写“一九二六年德国苟庭根大学数理博士朱言钧”，与一般认为的朱于 1927 年取得博士学位一说有矛盾，待考。