

Riemann



黎曼猜想漫谈(五)

卢昌海

23

哈代定理

就在玻尔和兰道研究零点分布的同时，另一位为黎曼猜想而着迷的数学家——哈代——也没闲着。1914年，即与玻尔-兰道定理的提出同年，哈代的研究也取得了突破性的结果。这便是我们在第1节中提到的那个“令欧洲大陆数学界为之震动的成就”。在黎曼猜想的研究中，这一结果被称为哈代定理：

哈代定理：黎曼 ζ 函数有无穷多个非平凡零点位于 critical line 上。

哈代一生对数学有着诸多的贡献，哈代定理这一名称有时也被用来表示复变函数论中的一个定理。

我们知道（详见第22节），无论阿达马，Vallée-Poussin，还是玻尔，兰道，在哈代之前人们所做的有

关黎曼猜想的所有解析研究，都没能证明哪怕一个零点落在 critical line 上。那时人们所知的有关 critical line 上的零点的全部结果只有我们在第8节中提到的1903年格拉姆给出的15个零点以及1914年（与哈代定理同年）Backlund 计算的79个零点。全部都是零星计算，且涉及的零点少得可怜。而忽然间，来自英伦岛上的哈代居然不动声色地一举把 critical line 上的零点数目扩大到了无穷，不仅远远超过 Backlund 的区区79个零点，也远远超过了后世所能给出的任何具体计算结果。因为无论用多高明的计算方法，无论用多强大的计算设备，也无论用多漫长的计算时间，任何具体计算所能验证的零点数目都是有限的，而无论多大的有限数量相对于无限来说都只是一个“零”。

Riemann



哈代

Godfrey Harold Hardy

因此哈代定理虽没有给出 critical line 上任何一个具体的零点数值，但它通过对这些零点的存在性证明为黎曼猜想提供了强有力的支持 [注 23.1]，这种支持从某种意义上讲超越了任何可能的具体计算。这样的结果出现在人们对黎曼 ζ 函数非平凡零点还知之甚少的 1914 年，而且还出现在与欧洲大陆数学界颇为疏离的英国，不能不令欧洲大陆的数学家们感到震动。

哈代定理的证明可以从一个有关 $\zeta(s)$ 的积分表式

$$\frac{2\zeta(s)}{s(s-1)} = \int_0^\infty \left[G(x) - 1 - \frac{1}{x} \right] x^{-s} dx$$

入手。这里 $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ ，被积表达式中的函数 $G(x)$ 定义为：

$$G(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x^2}.$$

我们在第 5 节中介绍过， $\zeta(s)$ 的零点与黎曼 ζ 函数的非平凡零点重合，并且它是一个整函数，性质比黎曼 ζ 函数来得简单。在黎曼猜想的研究中这是一个十分重要的辅助函数。证明哈代定理的基本思路便是设法从上式中找出与 $\zeta(s)$ 在 critical line 上的零点分布有关的约束条件来。为此，第一步是从上式中解出 $G(x) - 1 - 1/x$ 。这与我们在第 4 节中介绍过的从 $\ln \zeta(s)$

与 $J(x)$ 的积分表达式中解出 $J(x)$ 来是完全类似的，其结果也类似：

$$G(x) - 1 - \frac{1}{x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{2\zeta(z)}{z(z-1)} x^{z-1} dz,$$

其中积分上下限中的 a 满足 $0 < a < 1$ 。从 $G(x)$ 的定义中不难看到（读者可以自行证明） $G(x)$ 在复平面上 $-\pi/4 < \operatorname{Im} \log(x) < \pi/4$ 的楔形区域内解析。进一步的研究还表明，在这一楔形区域的边界上 $G(x)$ 存在奇点，特别是，当 x 从楔形区域内逼近 $i^{1/2}$ （即 $e^{\pi i/4}$ ）时， $G(x)$ 及其所有导数都趋于零。

另一方面，假如 $\zeta(s)$ 在 critical line 上只有有限多个零点，那么只要 t 足够大， $\zeta(1/2+it)$ 的符号就将保持恒定（请读者想一想这是为什么？）。换句话说，只要 t 足够大， $\zeta(1/2+it)$ 要么是恒正函数，要么是恒负函数。由于 $\zeta(s)$ 在 critical line 上为实数（参阅第 11 节），且 $\overline{\zeta(\overline{s})} = \zeta(s)$ （参阅第 22 节）， $\zeta(1/2+it)$ 作为 t 的函数是一个偶函数，因此我们只需考虑 $t > 0$ 的情形即可。显然， t 的这种大范围特征对上式右端的积分（积分限中的 a 取为 $1/2$ ）会产生可观的影响。这种影响究竟有多大呢？哈代经过研究发现，它足以破坏 $G(x)$ 在 $x \rightarrow i^{1/2}$ 时的所有导数都趋于零这一结果。这就表明 $\zeta(s)$ 在 critical line 上不可能只有有限多个零点！而这正是哈代定理。

限于篇幅，我们略去了证明，概括的讲，它主要包括三个步骤：1.（容易）消去左端的 $-1-1/x$ 及右端被积函数中的 $1/z(z-1)$ 以简化表达式。具体做法是用算符 $x(d^2/dx^2)x$ 作用于 $G(x)$ 的积分表达式的两端。2.（容易）证明简化后的左端 $H(x)=x(d^2/dx^2)xG(x)$ 在

注 23.1

在历史上，这种存在性证明由于其非构造性的特征，曾被以 L.E.J. Brouwer (1881-1966)，赫尔曼·外尔，A. Heyting (1898-1980) 等为代表的数学哲学“三大流派”之一的直觉主义 (Intuitionism) 所排斥。但是存在性证明是数学中极其重要的方法，在很大程度上体现了逻辑与推理的力量，就像一个高明的侦探不需要跑到罪犯家中将之拿下就可以断定谁是凶手。直觉主义抛弃的东西实在太多，最后就连代表人物之一的外尔也不得不承认，在直觉主义中“数学家们痛苦地看着数学大厦中自己深信基础坚实的许多部分在他们眼前化为了迷雾”。

Riemann

$x \rightarrow i^{1/2}$ 时具有与 $G(x)$ 一样的行为, 即所有导数都趋于零。3. (较难) 证明 $\zeta(1/2+it)$ 在 t 很大时具有恒定的符号对 $2\zeta(z)x^{z-1}$ 的积分产生的贡献足以使得 $H(x)$ 在 $x \rightarrow i^{1/2}$ 时的高阶导数无法为零。

哈代定理在研究黎曼猜想的征程上无疑是一个了不起的成就。但是它距离目标究竟还有多远呢? 却是谁也答不上来。从字面上看, 黎曼 ζ 函数共有无穷多个非平凡零点, 而哈代定理所说的正是有无穷多个非平凡零点位于 critical line 上, 两者似乎相差不多。可惜的是, “无穷”这一概念却是数学中最微妙的概念之一, 两个“无穷”之间非但未见得相同, 简直可以相距要多遥远有多遥远, 甚至无穷远! 因此为了知道我们离目标究竟还有多远, 我们还需要比哈代定理更具体的结果。

幸运的是, 这样的结果很快就有了, 离哈代定理的出现仅仅相隔了七个年头。在研究黎曼定理的征程中, 时间动辄就以几十年计, 因此七年应该算是很短的时间。这回出现在英雄榜上的人物除了哈代外, 还有李特尔伍德 (John Edensor Littlewood, 1885-1977)。

24

哈代 - 李特尔伍德定理

哈代一生除了对数学本身的卓越贡献外, 还有两段与他人合作的经历在数学史上被传为佳话。其中一段是与印度数学奇才拉马努金 (Srinivasa Aiyangar Ramanujan, 1887-1920) 的传奇合作, 另一段便是与李特尔伍德。李特尔伍德与哈代一样, 是英国本土的数学家。我们曾在第 1 节中介绍过, 英国的数学界自牛顿 - 莱布尼茨论战以来渐渐与欧洲大陆的数学界孤立了开来。1906 年, 当李特尔伍德还是剑桥大学三一学院 (Trinity College) 的一位年轻学生的时候, 这种孤立所导致的一个有趣的后果落到了他的头上。他当时的导师巴恩斯 (Ernest William Barnes, 1874-1953) 在那年的暑期前随手写给了他一个函数, 轻描淡写地告诉他说这叫做 ζ 函数, 让他研究研究这个函数的零点位置。初出茅庐的李特尔伍德不知 ζ 函数为何方神圣, 领命而去倒也罢了, 但巴恩斯居然能漫不经心地把这样的课题交给当时还是“菜鸟”(尽管算是比较厉

害的“菜鸟”) 的李特尔伍德, 说明他对欧洲大陆在近半个世纪的时间里对这一函数的研究, 以及由此所显示的这一课题的艰深程度基本是一无所知。

不过巴恩斯虽有对“敌情”失察之过, 把任务交给李特尔伍德却是找对了人, 因为李特尔伍德很快就成为了英国第一流的数学家, 而在这过程中巴恩斯所给的这个课题不无促进之功。若干年后, 当李特尔伍德终于体会到黎曼猜想的艰深程度, 甚至开始怀疑其正确性 (参阅第 9 节) 的时候, 他并没有后悔当时接下了这一课题, 因为一位真正优秀的数学家在面对一个绝顶难题的时候, 往往会被激发出最为敏锐的数学灵感。

拿到课题后的第二年, 李特尔伍德就发现这个 ζ 函数与素数分布之间存在着紧密的关联。对于欧洲大陆的数学家来说, 这种关联已不足为奇, 因为它早在四十八年前就被黎曼发现了。但在闭塞的英国数学界, 欧洲大陆在这方面的工作当时还鲜为人知。这其中恰好与李特尔伍德同在三一学院的哈代是一个例外。尽管李特尔伍德的发现不是原创的, 但他能独立地重复黎曼的部分工作, 其功力之不凡还是给年长的哈代留下了深刻的印象。此后李特尔伍德在曼彻斯特大学教了三年书, 1910 年获得三一学院的教职后重返剑桥, 由此开始了与哈代长达三十七年亲密无间的合作生涯, 直至 1947 年哈代去世为止。



李特尔伍德
John Edensor Littlewood

Riemann

哈代与李特尔伍德的合作堪称数学史上的典范。在他们合作的极盛时期，欧洲学术界流传着许多有关他们的善意的玩笑。比如玻尔（玻尔-兰道定理中的玻尔）曾开玩笑地说当时英国共有三位第一流的数学家：一位是哈代，一位是李特尔伍德，还有一位是哈代-李特尔伍德。而与之截然相反的另一个玩笑则是说李特尔伍德根本就不存在，是哈代为了自己的文章一旦出现错误时可以有替罪羊而杜撰出来的人物。据说兰道（玻尔-兰道定理中的兰道）还专程从德国跑到英国来证实李特尔伍德的存在性。

哈代-李特尔伍德对 critical line 上零点的研究起点与哈代定理相同，也是上面提到的 $G(x)$ 与 $\zeta(s)$ 之间的积分表达式。在哈代定理的证明中，如我们在上文及注释中看到的，着眼点是 $2\zeta(s)x^s/s(s-1)$ 在整个 critical line 上的积分。这一着眼点其实已经为哈代定理的结果埋下了伏笔，因为既然研究的是整个 critical line 上的积分，所得到的当然也就只是有关整个 critical line 上零点总数的笼统结果。为了得到能与黎曼猜想对零点的描述相比较的结果，我们需要的不仅是对整个 critical line 上零点总数的研究，更重要的是要了解 critical line 上位于区间 $0 \leq \text{Im}(s) \leq T$ 的零点数目。为此，哈代-李特尔伍德研究了 $2\zeta(s)x^s/s(s-1)$ 在 critical line 上任一区间的积分，即：

$$I(x, s, k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-ik}^{s+ik} \frac{2\zeta(z)}{z(z-1)} x^{z-1} dz,$$

其中 $\text{Re}(s)=1/2$ 。通过对这一积分的细致研究，哈代与李特尔伍德发现 critical line 上不仅有无穷多个，而且其趋于无穷的速度起码是 KT （其中 K 为大于零的常数）。他们发表于 1921 年的这一结果在数学界并无确切的名称，我们在这里将它称为哈代-李特尔伍德定理 [注 24.1]，它的完整表述如下：

注 24.1

在数学界，以哈代-李特尔伍德命名的最主要的定理是 Hardy-Littlewood Maximal Theorem，但这一定理并不经常被简称为哈代-李特尔伍德定理，因此“哈代-李特尔伍德定理”这一名称可算是半个空缺，这里我们就用他们在黎曼猜想领域内的这一成就来填补这半个空缺。

哈代-李特尔伍德定理：存在常数 $K>0$ 及 $T_0>0$ ，使得对所有 $T>T_0$ ，黎曼 ζ 函数在 critical line 上 $0 \leq \text{Im}(s) \leq T$ 的区间内的非平凡零点数目不小于 KT 。

那么哈代-李特尔伍德定理距离目标——黎曼猜想——有多远呢？我们可以回忆一下第 5 节中黎曼的三个命题中的第一个，即：在 $0 \leq \text{Im}(s) \leq T$ 的区间内（不限于 critical line 上），黎曼 ζ 函数的零点总数大约为 $(T/2\pi)\ln(T/2\pi) - (T/2\pi)$ 。这个命题于 1905 年被曼戈尔特（H. C. F. von Mangoldt, 1854-1925）所证明，这也是黎曼的三个命题中迄今唯一得到证明的命题。与这个命题相比，我们可以看到一个令人沮丧的结果，那就是哈代-李特尔伍德定理所给出的 critical line 上零点下限的渐近估计相对于零点总数来说，其渐近比例为零！真是不比不知道，一比吓一跳，原来花了这么大力气所得到的这些结果从纯比例的角度看竟是如此地“微不足道”。这就是我们与黎曼猜想的距离，这就是黎曼猜想的难度。

但尽管如此，哈代-李特尔伍德定理是有关黎曼 ζ 函数非平凡零点在 critical line 上具体分布的第一个解析结果。在当时也是唯一一个这样的结果。这一纪录总共维持了 21 年，直到 1942 年才被塞尔伯格所打破。



数学世界的独行侠

在二十世纪的数学家中，塞尔伯格（Atle Selberg, 1917-2007）是非常独特的一位。当数学的发展使得数学家之间的相互合作变得日益频繁的时候，塞尔伯格却始终维持了一种古老的独行侠姿态，他所走的是一条独自探索的道路。塞尔伯格于 1917 年

注 25.1

这一公式叫做哈代-拉马努金公式，它所描述的是将一个任意正整数分解为正整数之和的可能方式数。但是哈代-拉马努金公式虽然非常复杂，却仍只是一个近似的结果。Rademacher 及塞尔伯格所做的是将它改进为精确的结果。

Riemann



塞尔伯格
Atle Selberg

出生在寒冷的北欧国家挪威。年少的时候他常常一个人独自静坐在他父亲的私人图书室里阅读数学书籍。那段经历与他后来近乎孤立的研究风格遥相呼应。就在那时，他接触到了有关印度数学奇才拉马努金的故事。那些故事，以及拉马努金的那些有如神来之笔的奇妙公式深深地吸引了他。随着阅读的深入，塞尔伯格自己的数学天赋也渐渐显现了出来。在二十岁那年，他已经可以对哈代与拉马努金的一个著名的公式作出改进^[注 25.1]。遗憾的是，同样的结果在一年之前已经由德国数学家 Hans Rademacher (1892-1969) 做出并发表了。

在二战期间，欧洲的许多科学家被迫离开了家园，整个欧洲的科学界变得沉寂凋零。但塞尔伯格仍然留在了挪威，在奥斯陆大学 (University of Oslo) 独自从事数学研究。随着战事的深入，学校里不仅人越来越少，到后来连外界的学术期刊也无法送达了。塞尔伯格与数学界的交流彻底地中断了。但这种在常人看来十分可怕的孤立，在塞尔伯格眼里却有一种全然不同的感觉。他后来回忆当时的情形时说：“这就像处在一座监狱里，你与世隔绝了，但你显然有机会把注意力集中在自己的想法上，而不会因其他人的所作所为而分心，从这个意义上讲我觉得那种

情形对于我的研究来说有许多有利的方面”。这个道理虽然浅显，但真正能忍受这种孤立的环境，并善加利用的人却是少之又少，塞尔伯格是其中之一。

战争结束后的 1946 年，塞尔伯格应邀出席在丹麦首都哥本哈根举行的斯堪的纳维亚数学家大会 (Scandinavian Congress of Mathematicians)，并做了报告，向数学界介绍他在战争期间所做的工作。这其中最重要的就是我们将在下节中介绍的他在黎曼猜想方面的成就。在那段战火纷飞、纳粹横行的黑暗岁月里，欧洲的数学界几乎分崩离析，数学家们走的走，散的散，下岗的下岗、参战的参战，真正留在本土从事研究且作出重大贡献的人很少，以至于玻尔 (Harald Bohr) 曾对来访的美国同行戏称说战时整个欧洲的数学新闻可以归结为一个词，那就是塞尔伯格！

塞尔伯格的卓越贡献一经曝光很快引起了著名的美国“猎头公司”普林斯顿高等研究所的注意。普林斯顿高等研究所我们曾在第 17 节中提到过。与那些每一条林荫道、每一间咖啡屋都散发着悠远历史的欧洲学术之都相比，创建于 1930 年的高等研究所显得十分年轻。但它却在极短的时间内声誉鹊起，成为了世界级的学术中心。这一崛起在很大程度上得益于它在二战期间吸引了从欧洲来到美国的许多第一流的学者，这其中包括像爱因斯坦 (Albert Einstein, 1879-1955) 与哥德尔 (Kurt Gödel, 1906-1978) 这样的绝世高手。战争结束后，在高等研究所任教的赫尔曼·外尔 (Hermann Weyl, 1885-1955) 向塞尔伯格发出了邀请。外尔本人就是被普林斯顿高等研究所“猎取”的来自欧洲的顶尖数学家，他曾是希尔伯特在哥廷根大学的继任者，但外尔的妻子是犹太人，这使他们在德国难以立足。塞尔伯格接受了外尔的邀请，于 1947 年来到高等研究所，1949 年成为正式成员。1950 年，塞尔伯格因其在黎曼猜想及其它领域的杰出贡献，与法国数学家洛朗·施瓦茨 (Laurent Schwartz, 1915-2002) 共同获得了数学界的最高奖：菲尔兹奖。

菲尔兹奖委员会对塞尔伯格获奖贡献的描述是：发展推广了 Viggo Brun 的筛法 (The Sieve Methods)；获得了有关黎曼 ζ 函数零点的重要结果；(与保罗·埃尔德什一起) 给出了一个素数定理的初等证明，以及对任意算术序列中素数研究的推广。

Riemann

普林斯顿高等研究所是学术交流与合作的天堂，它与战时奥斯陆大学的与世隔绝有着天壤之别。但塞尔伯格的研究风格并没有因环境而变化，他一如既往地走着一条孤立研究的道路^[注 25.2]，并且和高斯一样，他有许多工作没有发表。年轻的时候，他的孤立使他未能及早发现 Rademacher 已经发表的文章，以至于重复了后者的工作。如今，在他的声誉如日中天时，他的孤立却让其他数学家的心里忐忑了起来，担心自己辛苦劳作的结果是在重复塞尔伯格早已完成的工作。在塞尔伯格落户普林斯顿二十几年后的一天，正是这种担忧让年轻的蒙特哥麦利踏上了普林斯顿之旅，从而有了我们在第 17 节中叙述过的那个数学与物理交汇的动人故事。

26

临界线定理

对于我们这个系列来说，在塞尔伯格的工作中最重要的，显然是他有关黎曼 ζ 函数非平凡零点的研究。他的这一研究是在二战期间进行的。出于对拉马努金的兴趣，塞尔伯格对剑桥大学的“三剑客”：拉马努金、哈代、及李特尔伍德的工作进行了深入的研究。其中哈代与李特尔伍德所证明的有关黎曼 ζ 函数非平凡零点分布的哈代-李特尔伍德定理引起了极大的兴趣。哈代-李特尔伍德定理是一个非常精彩的定理，但它的结果却太弱，因为——如我们在第 24 节中所说——它所能确立的位于 critical line 上的零点数目相对于零点总数来说，其渐近比例等于零。

塞尔伯格想要做的是改进这一结果。

哈代与李特尔伍德都是英国顶尖的数学家，虽然他们的结果距离解决黎曼猜想还非常遥远，但他们的

这一工作思路周详，推理严谨，几乎没有留下任何空隙让别人去填补。他们所用的方法已经被推到了极致，这一点哈代与李特尔伍德自己也很清楚，在论文中他们明确表示用这一方法已经难以取得进一步的结果。

因此，要想改进哈代与李特尔伍德的结果，就必须突破他们所用的方法。我们知道（详见第 23、24 节），在哈代与李特尔伍德所用的方法中很关键的部分就是对 $2\zeta(s)x^s/s(s-1)$ 的积分进行研究。哈代最初研究的是 $2\zeta(s)x^s/s(s-1)$ 在 $(1/2-i\infty, 1/2+i\infty)$ 的积分，而在哈代与李特尔伍德的合作研究中，为了得到 critical line 上零点分布的细致结果，这一积分范围被细化成了 critical line 上的任意区间 $(s-ik, s+ik)$ ，其中 $\text{Re}(s)=1/2$ 。从积分区间的角度讲，这一推广已经达到了极致。

那么想要突破哈代与李特尔伍德的方法，该从哪里下手呢？塞尔伯格把目光盯在了被积函数上。塞尔伯格发现，如果我们用一个适当的函数对哈代与李特尔伍德所用的被积函数 $2\zeta(s)x^s/s(s-1)$ 进行“调制”，就有可能使其积分的研究变得更为精准。为此他把自己的注意力放在一个更普遍的积分：

$$I(x, s, k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-ik}^{s+ik} \frac{2\zeta(z)}{z(z-1)} \varphi(z) \varphi^*(z) x^{z-1} dz$$

上。这个积分与哈代与李特尔伍德所用的积分相比多了一个被积因子 $\varphi(z)\varphi^*(z)$ ，这个因子就是塞尔伯格引进的调制函数。

那么什么样的调制函数比较有利于对这个积分进行研究呢？塞尔伯格认为应该选一个能够对 $\zeta(z)$ 在零点附近的行为进行某种控制的函数。这种函数的一个比较容易想到的选择是 $\varphi(z)=[\zeta(z)]^{-1/2}$ 。由于 $\zeta(z)$ 与 $\zeta(\bar{z})$ 具有同样的零点，因此用这个调制函数可以完全消去 $\zeta(z)$ 的零点。但这个选择有一个不利之处，那就是它在 $z=1$ 处具有奇异性。为了避免这一奇异性对 $\varphi(z)$ 的解析延拓造成麻烦，塞尔伯格对 $[\zeta(z)]^{-1/2}$ 的展开式 $[\zeta(z)]^{-1/2} = \sum \alpha_n n^{-z}$ 进行了截断处理，他引进了一个新的级数 $\varphi(z) = \sum \beta_n n^{-z}$ 。这个新级数的系数 β_n 在 n 小于等于某个大数 N 的时候定义为 $[1-\ln(n)/\ln(N)]\alpha_n$ ，而在 $n>N$ 时则为零。这样 $\varphi(z)$ 至多只有 $N+1$ 项，是一个有限级数，从而对所有的 z 都解析。另一方面，在 N 很大时它是对 $[\zeta(z)]^{-1/2}$ 的近似，因此通过对 N 进行调节，塞尔伯格可以对 $\zeta(z)$ 在零点

注 25.2

塞尔伯格一生只有一篇论文是与人合作的，合作者是我们第十七节中提到的那位促成了蒙特哥麦利与戴森会面的印度数学家周拉（周拉的交际能力之强由此可见一斑）。除此之外，即使在菲尔兹奖委员会提到的他与埃尔德什一起得到的素数定理的初等证明中，他也不曾与埃尔德什合写论文（这件事情后来还不幸演变成他与埃尔德什之间一段很不愉快的经历，这是题外话）。

Riemann

附近的行为进行某种控制。

这一调制函数果然不负厚望，通过它的辅助，塞尔伯格经过复杂的计算与推理，终于证明了一个比哈代-李特尔伍德定理强得多的结果。这个结果被称为临界线定理 (Critical line Theorem)：

临界线定理：存在常数 $K>0$ 及 $T_0>0$ ，使得对所有 $T>T_0$ ，黎曼 ζ 函数在 critical line 上 $0\leq\text{Im}(s)\leq T$ 的区间内的非平凡零点数目不小于 $K T \ln(T)$ 。

有的读者可能会问：这个定理为什么不叫做塞尔伯格定理？那是因为“塞尔伯格定理”这一名称已经名花有主了。不过即便如此，人们有时也的确仍把临界线定理称为塞尔伯格定理。

塞尔伯格得到这一结果是在 1942 年，当时欧洲的战火仍在燃烧，奥斯陆大学仍处于与世隔绝之中。外界的数学家们固然大都不知道他的这一重大结果，塞尔伯格本人也不确定自己是否又会像当年改进哈代与拉马努金的工作那样重复别人已经完成的东西。战争一结束，当他听说邻近的特隆赫姆理工学院 (Institute of Technology in Trondheim) 已经收到了在战争期间无法送达的数学杂志，就专程前往，花了一星期的时间查阅文献。这一次他没有失望，二十一年来数学界对黎曼 ζ 函数非平凡零点的解析研究基本上仍停留在哈代-李特尔伍德定理的水平上，孤独的塞尔伯格远远地走到了时代的前面。

那么塞尔伯格的这一临界线定理究竟强到什么程度呢，让我们再回忆一下在第 5 节中提到，并在后面章节中屡次被引述的黎曼的三个命题中的第一个（也是唯一一个被证明的）命题：在 $0<\text{Im}(s)<T$ 的区间内（不限于 critical line 上），黎曼 ζ 函数的零点总数大约为 $(T/2\pi)\ln(T/2\pi) - (T/2\pi)$ 。将这个结果与塞尔伯格的临界线定理相比较，显然可以看到（请读者自行证明）：**临界线定理表明黎曼 ζ 函数在 critical line 上的零点在全部非平凡零点中所占的比例大于零！**就这样，从玻尔、兰道到哈代、李特尔伍德，再到塞尔伯格，经过一系列艰辛的解析研究，数学家们所确定的位于 critical line 上的零点数目终于超过了 0%，达到了一个“看得见”的比例，这在黎曼猜想的研究中是一个重要的里程碑。

27

Levinson 方法

塞尔伯格的临界线定理表明 critical line 上的非平凡零点所占比例大于零。那么这个比例究竟是多少呢？塞尔伯格在论文中没有给出具体的数值。据说他曾经计算过这一比例，得到的结果是 5%-10%^[注 27.1]。另外，中国数学家闵嗣鹤 (1913-1973) 在牛津大学留学 (1945-1947) 时曾在博士论文中计算过这一比例，得到了一个很小的数值。这些结果或是太小，或是没有公开发表，在数学界鲜有反响。总的来说，塞尔伯格的结果更多地是被视为一种定性的结果：即首次证明了位于 critical line 上的零点占全体非平凡零点的比例大于零。

有关这一比例的具体计算时隔二十多年才有了突破性的进展。这一进展是由美国数学家列文森 (Norman Levinson 1912-1975) 做出的。列文森小时候家境非常贫寒，父亲是鞋厂工人，母亲目不识丁且没有工作，但他在十七岁那年成功考入了著名的高等学府麻省理工学院 (MIT)。在麻省理工的前五年，列文森在电子工程系就读，但他选修了几乎所有的数学系研究生课程，并得到著名数学家诺伯特·维纳 (Norbert Wiener, 1894-1964) 的赏识。1934 年列文森转入数学系，这时他的水平已完全具备了数学博士的资格。于是维纳帮他申请了一笔奖学金，让他去哈代所在的剑桥大学访问一年。次年列文森返回麻省理工，立即拿到了博士学位。列文森在学术生涯的早期先后经历了美国的经济大萧条及麦卡锡主义 (McCarthyism) 的盛行，几次面临放弃学术研究的境况，但最终还是幸运地度过了难关。

列文森在傅里叶变换、复分析、调和分析、随机分析、非线性微分及积分方程等领域都做出过杰出的贡献。他二十八岁时就在美国数学学会出版了有关傅里叶变换的专著，这通常是资深数学家才有机会获得的殊荣；他在非线性微分方程领域的工作于 1953 年

注 27.1

也有说是 1% 左右。这种比例指的都是下界，5%-10% 指的是至少有 5%-10% 的非平凡零点在 critical line 上。

Riemann



列文森
Norman Levinson

获得了美国数学学会每五年颁发一次的博谢纪念奖 (Bôcher Memorial Prize); 他 1955 年完成的著作《常微分方程理论》一出版就成为这一领域的经典著作。但他最令世人惊叹的则是在年过花甲, 生命行将走到尽头的时候忽然在黎曼猜想的研究中获得了重大突破, 给出了 critical line 上零点比例的一个相当可观的下界估计。

列文森对零点比例的研究采取了与哈代、李特尔伍德及塞尔伯格十分不同的方法。他的基本思路来源于 $\zeta(s)$ 与其导数 $\zeta'(s)$ 的零点分布之间的关联。早在 1934 年, Andreas Speiser (1885-1970) 就曾证明过黎曼猜想等价于 $\zeta'(s)$ 在 $0 < \operatorname{Re}(s) < 1/2$ 上没有零点。1974 年 列文森 与蒙特哥麦利合作证明了 Speiser 结果的一个定量版本, 那就是 $\zeta'(s)$ 在 $\{-1 < \operatorname{Re}(s) < 1/2, T_1 < \operatorname{Im}(s) < T_2\}$ 内的零点数目与 $\zeta(s)$ 在 $\{0 < \operatorname{Re}(s) < 1/2, T_1 < \operatorname{Im}(s) < T_2\}$ 内的零点数目之比渐近于 1。有了这一

注 27.2

确切地讲, 从上述结果中得到的是有关 $\zeta(s)$ 在 critical line 之外——即 $0 < \operatorname{Re}(s) < 1/2$ ——的零点数目的信息 (请读者想一想我们为什么不提 $1/2 < \operatorname{Re}(s) < 1$)。但由此可以很容易地推出有关 critical line 上零点数目的信息。

结果, 人们就可以通过研究 $\zeta'(s)$ 的零点分布得到有关 $\zeta(s)$ 在 critical line 上的零点数目的信息 [注 27.2], 这正是列文森所做的。与上述结果的发表同年, 列文森通过这种方法得到了对 critical line 上零点比例的估计。

列文森的计算在刚开始的时候给出了一个非常乐观的结果: 98.6% ! 他把自己的一份手稿交给了同事 Gian-Carlo Rota (1932-1999), 并且幽默地宣称自己可以把这个比例提高到 100%, 但他要把剩下的 1.4% 留给读者去做。Rota 信以为真, 便开始传播“列文森证明了黎曼猜想”的消息。这很快被证明是一个双重错误: 首先, 在列文森的方法中, 即使真的把比例提高到 100%, 也不等于证明了黎曼猜想 (请读者结合 [注 27.3] 思考一下这是为什么); 其次, 很快就有人在列文森的证明中发现了错误。幸运的是, 这一错误并没有彻底摧毁列文森的努力, 只不过那个奇迹般的 98.6% 掉落尘埃变成了 34%。列文森最终把自己论文的标题定为: “黎曼 Zeta 函数超过三分之一的零点位于 $\sigma=1/2$ ”。这里的 σ 就是 $\operatorname{Re}(s)$ 。如果我们用 $N_0(T)$ 表示 critical line 上区间 $0 < \operatorname{Im}(s) < T$ 内的零点数目, 而 $N(T)$ 表示 critical strip 上区间 $0 < \operatorname{Im}(s) < T$ 内的零点数目 (这也就是满足 $0 < \operatorname{Im}(s) < T$ 的全部非平凡零点的数目), 则列文森的结果可以表述为 [注 27.3]:

列文森临界线定理: 存在常数 $T_0 > 0$, 使得对所有 $T > T_0$, $N_0(T) \geq (1/3) N(T)$ 。

列文森的这一结果是继塞尔伯格之后在这一领域中的又一个重大进展, 它不仅为 critical line 上的零点比例给出了一个相当可观的下界, 更重要的是, 列文森的这种把 $\zeta(s)$ 与 $\zeta'(s)$ 的零点分布联合起来进行研究的方法——被称为列文森方法——为许多后续研究奠定了基础。

注 27.3

与塞尔伯格的情形类似, “Levinson 定理”这一名称也已名花有主, 在本文中我们把形如 $N_0(T) \geq C N(T)$ 的定理均称为临界线定理, 除对塞尔伯格的结果不加冠语外, 其余的一律以证明者的姓氏来区分。另外需要指出的是, Levinson 的原始论文所讨论的比例是针对 $N_0(T+U)-N_0(T)$ 与 $N(T+U)-N(T)$ (U 是一个与 T 有关的正数), 而不是直接针对 $N_0(T)$ 与 $N(T)$ 的, 不过在比例小于 100% 时这两者等价 (比例等于 100% 时则不等价)。

Riemann

28

艰难推进

运用列文森方法进行零点研究的第一个后续工作是由他本人做出的。1975年，即紧接着上述研究的那一年，列文森把 critical line 上零点比例的下界估计提高到了 0.3474。这虽然是一个很小的推进，但这种计算每一个都异常繁复，而列文森当时的身体状况已经极差，他能够完成这样的计算委实是一个奇迹。事实上那已是他生命中的最后一个年头，那一年的十月十日列文森因患脑瘤在他的学术故乡波士顿（麻省理工所在地）去世。

在列文森之后，数学家们艰难地推进着列文森的结果，但速度极其缓慢。1980年中国数学家楼世拓与姚琦证明了 $N_0(T) \geq 0.35 N(T)$ ；三年后康瑞 (Brian Conrey) 证明了 $N_0(T) \geq 0.3685 N(T)$ 。这些都是在小数点后的第二位数字上做手脚，1989年康瑞终于撼动了小数点后的第一位数字，他把比例系数提高到了 0.4，即：

Conrey 临界线定理：存在常数 $T_0 > 0$ ，使得对所有 $T > T_0$ ， $N_0(T) \geq (2/5) N(T)$ 。

这是迄今为止数学家们在这一方向上获得的最好结果。康瑞认为自己的证明还有改进的空间，但计算实在太复杂，不值得花费时间了。他的说法是：如果可以把估计值提高到 50% 以上，那就值得去做，因为那样的话人们至少可以说大部分零点都在 critical line 上。可惜康瑞认为他的证明能够改进的幅度不会超过几个百分点，不可能达到 50%。目前数学家们普遍认为用列文森方法不可能把对 critical line 上零点比例的下界估计推进到 100%。

虽然数学家们在推进 critical line 上零点比例的下界估计时进展缓慢，但在这一过程中他们也得到了许多相关的结果。这其中很重要的一类结果是关于简单零点在全部非平凡零点中所占比例的。数学家们普遍猜测，黎曼 ζ 函数所有的零点都是简单零点（这其中也包括平凡零点，但平凡零点的简单性是容易证明的），这被称为简单零点假设 (Simple Zero Conjecture)，它是一个迄今尚未得到证明的命题。简单零点假设也得到了许多数值及解析结果的支

持。1979年 D. R. Heath-Brown 对列文森方法做了改进（塞尔伯格也做了同样的工作，但没有发表），使之给出的比例变成有关简单零点的比例，从而把列文森 1975 年的结果转变成至少有 34.74% 的非平凡零点位于 critical line 上，并且都是简单零点。类似地，康瑞临界线定理指的也是至少有 $2/5$ 的非平凡零点位于 critical line 上，并且都是简单零点。除此之外，由于简单零点假设通常与黎曼猜想联系在一起，有时甚至被视为是黎曼猜想的一部分，因此也有一些数学家研究了在传统的黎曼猜想成立——即所有非平凡零点都位于 critical line 上——的前提下简单零点在非平凡零点中所占的比例。比如蒙特哥麦利在 1973 年证明了如果黎曼猜想成立，则至少有 $2/3$ 的非平凡零点是简单零点。

除了对黎曼 ζ 函数的零点进行研究外，数学家们对与之关系密切的 ζ 函数（参阅第 5 节）及其导数的零点分布也作了研究。比方说康瑞 1983 年的结果针对的实际上是 $\zeta(s)$ 及其各阶导数，他所得到的主要结果为：

$\zeta(s)$ 的零点至少有 36.85% 在 critical line 上。
 $\zeta'(s)$ 的零点至少有 81.37% 在 critical line 上。
 $\zeta''(s)$ 的零点至少有 95.84% 在 critical line 上。
 $\zeta'''(s)$ 的零点至少有 98.73% 在 critical line 上。
 $\zeta^{(4)}(s)$ 的零点至少有 99.48% 在 critical line 上。
 $\zeta^{(5)}(s)$ 的零点至少有 99.70% 在 critical line 上。

不仅如此，他还给出了有关高阶导数的渐近结果 [注 28.1]。这其中 $\zeta(s)$ 的零点由于恰好与 $\zeta(s)$ 的非平凡零点重合（参阅第 5 节），因此康瑞有关 $\zeta(s)$ 零点的结果便是我们前面提到的 $N_0(T) \geq 0.3685 N(T)$ 。从康瑞的结果中我们看到，有关 $\zeta(s)$ 各阶导数的结果远比有关 $\zeta(s)$ 本身的结果强得多，因此如果有什么办法能像列文森在 $\zeta(s)$ 与 $\zeta'(s)$ 之间建立的关联那样把有关 $\zeta(s)$ 各阶导数的结果转化为有关 $\zeta(s)$ 本身的结果（从而也就是有关 $\zeta(s)$ 的结果），那将对 critical line 上的零点估计产生突破性的影响。列文森在临

注 28.1

这个渐近结果表明 $\zeta^{(n)}(s)$ 的零点在 critical line 上的比例下界 p_n 当 $n \rightarrow \infty$ 时满足 $|1 - p_n| \sim O(n^{-2})$ 。

Riemann

终前曾认为自己有这样的办法，可惜他很快去世了，而迄今为止谁也没能找到这种办法。但即便如此，康瑞对 $\zeta(s)$ 各阶导数的零点分布的研究依然是很有意义的，因为可以证明：如果黎曼猜想成立，则 $\zeta(s)$ 及所有各阶导数的零点都必定位于 critical line 上。换句话说，只要发现 $\zeta(s)$ 及其任意阶导数的任何一个零点不在 critical line 上，就等于否证了黎曼猜想，因此康瑞的结果可以被视为是对黎曼猜想很有力的间接证据。

29

哪里没有零点？

读者们也许注意到了，我们在前面各节中介绍的有关零点分布的解析结果沿袭着一条共同思路，那就是尽可能地捕捉位于 critical line 上的零点。从玻尔-兰道定理确立 critical line 是零点分布的汇聚中心，到哈代定理确立 critical line 上有无穷多个零点，到哈代-李特尔伍德定理确定该“无穷多”最起码的增长方式，到各种临界线定理确定 critical line 上零点比例的下界，到有关简单零点的类似结果，到 $\zeta(s)$ 及各阶导数在 critical line 上零点比例的下界，所有这些努力都是在试图捕捉与 critical line 上的非平凡零点有关的性质。

这样的思路是非常合理的，因为黎曼猜想说的就是所有的非平凡零点都位于 critical line 上。如果我们能在 critical line 上把所有的零点一一“捉”到，自然就证明了黎曼猜想。但是，正如我们在这个漫长系列中所看到的，捕捉零点是一件极其困难的事情，这么多年来我们在 critical line 上捕捉到的零点数目还不到总数的一半。在这种情况下，我们不妨换一个角度来思考问题：既然我们还无法证明所有的零点都位于 critical line 上，那何不先试着排除掉某些区域呢？排除掉的区域越多，零点可以遁形的地方也就越少，这就好比是侦探寻找罪犯时把无关的人员排除得越干净，也就越有利于锁定罪犯。如果我们可以把 critical line 以外的所有区域——即 $\operatorname{Re}(s) < 1/2$ 与 $\operatorname{Re}(s) > 1/2$ ——全部排除掉，也同样就证明了黎曼猜想。

遗憾的是，在这方面数学家们获得的进展比直接捕捉零点还要少得多，简直可以说是少得可怜。从

排除区域的角度上讲，最先被排除的是 $\operatorname{Re}(s) < 0$ 及 $\operatorname{Re}(s) > 1$ ，这是非常简单的结果（参阅第 5 节）。接着被排除的是 $\operatorname{Re}(s) = 0$ 及 $\operatorname{Re}(s) = 1$ ，这是非常困难的结果，它直接导致了素数定理的证明（参阅第 7 节），critical strip 的概念也由此产生。这些结果距今都已经超过一百年了，那么在时隔这么多年之后我们是否有能力把这种结果再推进一点，比方说把 critical strip 的右侧边界由 $\operatorname{Re}(s) = 1$ 向左平移为 $\operatorname{Re}(s) = 1 - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$)，从而把 $\operatorname{Re}(s) \geq 1 - \varepsilon$ 的区域排除掉呢 [注 29.1]？不幸的是，我们还没有这个能力。无论把 ε 取得多小，一百多年来也始终没人能够把 $\operatorname{Re}(s) \geq 1 - \varepsilon$ 的区域排除掉。迄今为止，数学家们所能证明的只有诸如 critical strip 之内曲线 $\operatorname{Re}(s) = 1 - c / \ln[|\operatorname{Im}(s)| + 2]$ ($c > 0$) 右侧的区域内没有非平凡零点之类的结果。这一结果的基本形式是 de la Vallée-Poussin 于 1899 年给出的，距今也有一百多年了，数学家们在这方面所做工作之有限由此可见。

由于曲线 $\operatorname{Re}(s) = 1 - c / \ln[|\operatorname{Im}(s)| + 2]$ 在 $\operatorname{Im}(s) \rightarrow \infty$ 时无限逼近于 $\operatorname{Re}(s) = 1$ ，因此我们无法利用这一结果将 critical strip 的右侧边界向左平移哪怕一点点。

30

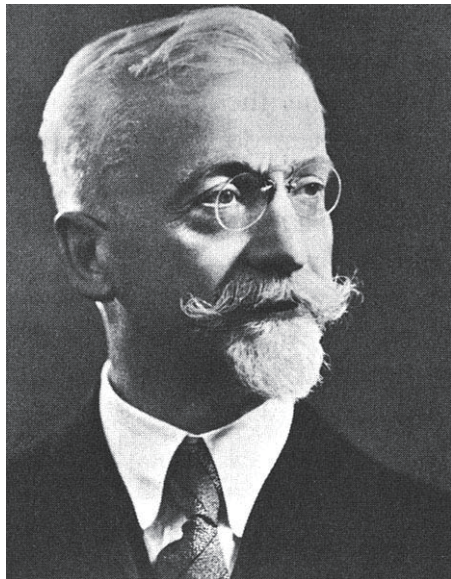
监狱来信

在前面各节中，我们介绍了数学家们在证明黎曼猜想的漫长征途上所作出的多方面尝试。这些尝试有些是数值计算（第 8-15 节及附录），它们虽然永远也不可能证明黎曼猜想，却有可能通过发现反例而否证黎曼猜想——当然，迄今为止并未有人发现反例；有些则是解析研究（第 22-29 节），它们具有证明黎曼猜想的潜力，但迄今为止距离目标还很遥远。如果小结一下的话，那么这两类尝试虽然很不相同，却都可以被归为直接手段，因为它们的目标都是黎曼猜想本身。

注 29.1

由于零点分布的对称性，在这种情况下 critical strip 的左侧边界也将相应改变。人们有时把 critical strip 的边界可以向内平移称为准黎曼猜想 (Quasi-Riemann Hypothesis)。

Riemann



埃利·嘉当
Élie Cartan

既然这两类直接手段都遇到了困难，那我们就要问这样一个问题：除这些直接手段外，还有没有别的手段可以帮我们研究黎曼猜想，或带给我们启示呢？答案是肯定的。

事实上，黎曼猜想虽然是一个极为艰深的难题，但这种连续几十年甚至更长时间无法解决的难题在科学上是并不鲜见的。科学家们对付这种难题的大思路其实很简单，那就是直接手段行不通时，就采用间接手段。当然，大思路虽然简单，具体采取什么样的间接手段，可就大有讲究了。一般来说，常用的间接手段有两类：第一类是研究与原问题等价的问题——那样的问题一旦被解决，原问题自然也就解决了 [注 30.1]；第二类则是研究与原问题相类似、但却更简单的问题——这类手段虽不能解决原



昂利·嘉当
Henri Cartan

问题，却有可能带给我们启示。更重要的是，在原问题实在太艰深时，这类手段往往比其它手段更具可行性。

就目前我们对黎曼猜想的了解而言，它看来是属于那种“原问题实在太艰深”的情形，因此我们首先要介绍的间接手段就是“往往比其它手段更具可行性”的第二类间接手段。这类手段在科学研究中有着广泛应用。比如物理学家们遇到很困难的三维空间中的问题时，往往转而研究二维、一维，甚至零维空间中与原问题相类似的问题。又比如生物学家们从事一些不宜在人体上作尝试的研究时，往往转而用动物作为研究对象。最近比较热门的用凝聚态体系模拟基础问题的做法，也是第二类间接手段的例子 [注 30.2]。这类手段通俗地讲，其实就是研

注 30.1

除研究等价问题外，人们有时还会研究比原问题更普遍的问题。有读者可能会问：那样的问题难道不应该与原问题同样困难、甚至更难吗？是的，一般来说，与一个难题相等价或更普遍的问题本身也不太可能是省油的灯，只不过解决难题往往需要灵感，而不同的问题（哪怕是等价的问题）所能激发的灵感是不同的，因此研究那样的问题有时能起到意想不到的作用。

注 30.2

这方面的一个例子，是利用石墨烯（graphene）中的电子运动与相对论量子力学中无质量粒子运动的类似性，来研究后者（参阅拙作《石墨烯——从象牙塔到未来世界》）。此外，2009 年受到过一些媒体关注的用特定流体中的声子运动来模拟黑洞附近光子行为的所谓“声学黑洞”（sonic black hole）也是一个例子。

Riemann

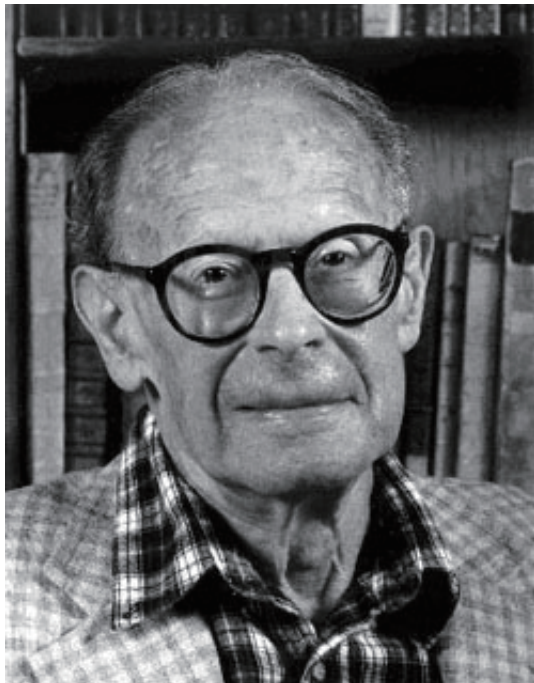
究“山寨版”的问题。只不过与经济领域中的“山寨版”产品被四处喊打不同，科学领域中的“山寨版”问题不仅不违规，对它们的研究还广受鼓励。有时候，在“山寨版”问题上的突破，甚至能成为重大的科学成就，并获得重大的科学奖项。黎曼猜想就是一个很好的例子，它的艰深与重要，使得“山寨版”的黎曼猜想也“鸡犬升天”，变成了非同小可的问题，研究或解决它的数学家甚至可以获得数学界的最高奖，堪称是“史上最牛”的“山寨版”。

需要补充说明的是，“山寨版”黎曼猜想的重要性并不仅仅来自于“正版”黎曼猜想的艰深与重要，它本身以及它与其它数学领域的关联也有着不容忽视的重要性。

为了介绍这种“史上最牛”的“山寨版”，让我们把时光暂时拉回到1940年。

1940年4月，著名的法国几何学家埃利·嘉当（Élie Cartan, 1869-1951）收到了一封奇怪的信件，它的寄信人地址是位于法国海滨城市鲁昂（Rouen）的一座军事监狱。一位著名数学家居然收到监狱来信，那会是一封什么样的信件呢？照常理来说，最大的可能性是某位民科的杰作，对于法国数学家来说，情况尤其如此。因为在这方面，法国科学院可谓是开了风气之先——自从一个多世纪前它为费马大定理悬赏以来，民科信件便如雪片般地飞到了法国数学家的手里。那热情，就连一百多年的时光也不足以使之熄灭。自那以后，知名法国数学家收到民科来信就不再是新鲜事了。不过嘉当收到的这封信件却有些不同，因为它的寄信人地址虽然很“民间”，字迹却颇为熟悉，因为那字迹属于一位真正的数学家。那数学家不仅嘉当认识，更是他那数学家儿子昂利·嘉当（Henri Cartan, 1904-2008）的好朋友。那位数学家的名字叫做安德烈·韦伊（André Weil, 1906-1998），他一生的许多重要工作虽然还有待于此刻拿在嘉当手里的这封监狱来信来揭开序幕，但当时的他就已在代数、分析、数论等诸多领域中享有了一定声誉。五年前，他还与几位志同道合的年轻数学家（其中包括昂利·嘉当）一同，创立了一个数学学派——布尔巴基（Bourbaki）学派。

嘉当对字迹的细心留意使那封监狱来信免遭了被弃之垃圾桶的命运，也为我们的黎曼猜想之旅增添了一段新的故事。



安德烈·韦伊
André Weil

31 与死神赛跑的数学家

身为数学家的韦伊怎么会跑到监狱里去的呢？这还得从他早年的一些经历说起。

韦伊是一位早熟的数学家，自九岁开始就在一份中学数学刊物上展露头角，对数学的喜爱则达到了着迷的程度。据说有一次他不小心摔了一跤，他那后来成为哲学家的妹妹所想到的安慰办法，居然是立刻去把他的数学书找来。十六岁时，韦伊进入了一所名为École Normale Supérieure的学校，这个校名翻译成中文是一个很土的名字，叫做“高等师范学校”。但莫看名字不起眼，它实际上却是一所为法国培养了十二位诺贝尔奖得主及十位菲尔兹奖得主的一流学府。在那里，韦伊参加了曾经证明过素数定理（参阅第5节）的著名数学家阿达马的讨论班，并开始研读包括黎曼在内的一些数学大师的著作。此外，他还结交了精研印度及东方文化的教授西勒万·列维（Sylvain Lévi, 1863-1935）。受后者影响，他一生都对印度文化怀有

Riemann



罗尔夫·奈望林纳
Rolf Nevanlinna

浓厚兴趣。自十九岁起，韦伊开始在欧洲各地游历，每到一处都结交了不少朋友。1930-1932年间，他到自己神往已久的印度生活了两年多，亲自接触了这个古老国度的文化。1935年，他还访问了苏联，结识了一些苏联数学家。

但他万万不曾想到的是，对印度文化的钟爱及与苏联数学家的友谊在不久之后将给他带来巨大的麻烦，甚至险些让他葬身异国他乡。

受印度教中某些和平主义思想的影响，在二战前夕的1939年夏天，韦伊作出了逃避兵役的决定。为此，他和妻子来到了北欧国家芬兰，打算以此为跳板前往美国。在芬兰期间，他沿袭了自己喜好游历的习惯，一边在各地旅行，一边与几位苏联数学家展开通信联络，讨论数学问题。几个月后，二战爆发，芬兰与苏联的关系趋于紧张，韦伊与苏联人的通信开始引

起芬兰方面的警惕：一个外国人，不远千里，来到芬兰，专门与苏联人联系，这是什么行为？芬兰方面的警惕很快变成了韦伊的厄运。1939年11月底，苏芬战争爆发，韦伊这位曾经访问过苏联，当时仍与苏联人频繁通信，甚至还很巧合地在战争爆发前游历过苏芬边境的法国人，几乎立刻就被当成苏联间谍抓捕归案。

在韦伊的物品中，芬兰警察发现了俄文信件，其中还夹带着疑似间谍符号的奇怪记号（其实是数学符号）^[注 31.1]。此外，芬兰警察还发现了一个名叫尼古拉·布尔巴基(Nicolas Bourbaki)的可疑人物的卡片。这就让事情更说不清了，因为尼古拉·布尔巴基是韦伊等人为布尔巴基学派所取的笔名（跟间谍的化名差不多），而那卡片则只不过是韦伊等人用自己的幽默感制作出的道具。可惜战云笼罩下的芬兰警察没有心情玩幽默，数学符号也好，幽默道具也罢，通通被视为间谍证据——至于你信不信，芬兰警察反正信了。

韦伊帮苏联人做间谍一事就这样被定了罪——而且是死罪。他的人生之旅走到了最危险的时刻。在这冰天雪地的异国他乡，有什么人能将他从死神手里救回呢？

临刑前的傍晚，韦伊在冰冷的死牢中等待最后一个夜晚的降临，当地的警察局长却正在参加一个热闹的晚宴。人生的际遇有时是很有戏剧性的。与苏联人讨论数学看似无害，却为韦伊带来了死罪；而警察局长的晚宴看似无益，却成为了韦伊的救命稻草。因为参加晚宴的宾客中有一位数学家名叫罗尔夫·奈望林纳(Rolf Nevanlinna, 1895-1980)。此人恰好是韦伊的朋友。韦伊在被审讯时曾经提到过这位朋友，可惜没管用，因为谁也不相信一位“苏联间谍”的话，更懒得去核实。奈望林纳是赫尔辛基大学(University of Helsinki)的数学教授，在全世界数学家的行列里虽排不到前列，在芬兰却是很著名的数学家^[注 31.2]，名声之大甚至连警察局长也认识。于是警察局长走到奈望林纳身旁，与他聊起了近日的“打黑”成果。他告诉

注 31.1

据韦伊后来回忆，那信件是著名苏联数学家列夫·庞特里亚金(Lev Pontryagin, 1908-1988)的来信。

注 31.2

顺便提一下，奈望林纳的学生当中有一位很著名的人物：Lars Ahlfors(1907-1996)。他是第一届菲尔兹奖的得主，所著《复分析》(Complex Analysis)一书是该领域最著名的教科书。

Riemann

奈望林纳：“我们明天将处决一名间谍，他声称认识您。通常我是不会为这类琐事打扰您的，但既然我们都在这里，我很高兴能有机会直接咨询一下您。”奈望林纳就问：“他叫什么名字？”警察局长回答说：“安德烈·韦伊。”奈望林纳大吃一惊，自己的朋友居然变成间谍，这真是“眼睛一眨，老母鸡变鸭”了！虽然他对事情的原委一无所知，但还是建议警察局长不要处决韦伊，而改为驱逐出境。

这一建议救了韦伊的命。他被芬兰警方送往瑞典边境驱逐出境，瑞典警方随即逮捕了他，将他送往英国，如此几经接力，韦伊于1940年2月被送回到了法国警方手里。法国警方则以“逃避兵役”（desertion）为由将他收押在前面提到的海滨城市鲁昂的军事监狱中，等候判决。

我们在第25节中介绍“独行侠”塞尔伯格时曾经提到过，战争造成的孤立让塞尔伯格眼里有一种全然不同的感觉，他将之比喻为是处在一座监狱里，虽然与世隔绝，却有机会把注意力集中在自己的想法上，从而对研究来说有许多有利的方面。塞尔伯格后来果真利用那样的孤立时光，在黎曼猜想研究中取得了重要进展（即临界线定理）。现在，我们有了一个更好的例子来印证塞尔伯格的感觉，那就是韦伊。与塞尔伯格的比喻不同，韦伊可是货真价实地蹲了监狱，他所取得的成果也确实对得住那样的经历。而且很巧的是，他那成果也与黎曼猜想有关——确切地说是跟“山寨版”的黎曼猜想有关。他那成果原本是应该等到出狱之后才发布的，但死里逃生的经历使他命运感到了迷惘，为防不测，他决定将成果写成信件先发出去，于是就有了嘉当所收到的那封监狱来信。

韦伊的经历和成果引起了很多数学家的“眼红”。昂利·嘉当在读了父亲转给他的韦伊的监狱来信后，毫不隐讳地向韦伊表示了“羡慕”之心：“我们都没那么幸运，能像你那样不受干扰地坐下来工作”。韦伊的印度朋友、哈代的学生 Tirukkannapuram Vijayaraghavan (1902-1955) 则不止一次地感慨道：“如果能有六个月或一年时间蹲监狱的话，我肯定能证明黎曼猜想。”这种幽默感想必是从他老师哈代那儿学来的，其可信度当然也只能与哈代的明信片（参阅第1节）相比。事实上，如果蹲六个月或一年的监狱就能证明黎曼猜想的话，数学家们肯定会抢破脑

袋去把牢底坐穿的，毕竟，与我们题记所引的蒙特哥麦利那句话相比，蹲监狱这种代价实在算不上什么。韦伊本人对自己在监狱中取得的成果也深感自豪，在给妻子的信中表示：“我的数学工作进展得超乎我最大胆的期望，我甚至有点担心——假如只有在监狱里才工作得这么好的话，我是不是每年都应该把自己关起来两三个月？”

这样“不受干扰”的“好日子”并没有持续太久，1940年5月初，对韦伊的判决下来了，他因逃避兵役被判五年监禁。不过这判决带有一个宽限条件，那就是假如他愿意去战斗部队服役的话，就可以免除监禁。韦伊接受了这一条件（幽默归幽默，坐牢毕竟是不好受的）。他没想到的是，这一选择使他在与死神的赛跑中又一次鬼使神差般地脱了身，因为仅仅一个多月后，随着法国在二战中的败退，海滨城市鲁昂就落入了德国人手中，尚被关押在军事监狱里的囚犯则全部遭到了德军的枪杀。

战争仍在继续，但不久之后，韦伊利用一份伪造的肺炎证明骗过军方，如愿以偿地实施了当初前往芬兰时就拟定的赴美计划。1941年初，韦伊全家抵达纽约，开始了全新的生活。到达美国后，他在利哈伊大学（Lehigh University）、芝加哥大学等地任过教，最终则落户于普林斯顿高等研究所，安然度过了自己的学术晚年。韦伊的一生在数学上有着颇多建树，“山寨版”的黎曼猜想只是他的研究方向之一。韦伊在这一方向上的研究持续了很多年，他虽不是这一方向的开创者，却对其发展起到了承前启后的作用，并且还代数几何（algebraic geometry）的发展起到了促进作用。韦伊没有获得过菲尔兹奖，但他所从事的将代数几何的方法与数论实践相结合的研究，使他于1979年获得了数学界的另一个著名奖项：沃尔夫奖。此外，他所开创的研究领域使几位其他数学家获得了菲尔兹奖。

卖了半天关子，这“山寨版”的黎曼猜想究竟是什么样子的呢？说起来有些出人意料，它虽然只是“山寨版”——因而比“正版”简单，但对多数读者来说，其表述却远比“正版”复杂，对科普来说更是堪称坚果。接下来，我们就要来啃一啃这枚坚果（不排除崩坏牙齿的可能性）。

未完待续