



数学史上最富有传奇色彩的数学家——伽罗瓦

纪念伽罗瓦诞辰 200 周年

邓明立

法国传奇数学家伽罗瓦，年仅 21 周岁便去世，可能是最英年早逝的数学家。以他名字命名的有“伽罗瓦群”、“伽罗瓦域”和“伽罗瓦理论”。而这些则是抽象代数学的标准术语。数学家及数学史家给出的公论是：他的死使数学的发展被推迟了几十年。当然历史不能假设，数学的发展也不能臆断，我们难以想象：如果伽罗瓦并非如此的“短寿”，那么现代的数学将会是什么样子。

时间: 1832年5月的某个清晨。

地点: 法国巴黎冈提勒的阁拉塞尔湖畔。

场景: 两名法国青年互相举着枪，在相距25步的地方，填弹，射击。其中一位青年被对手的枪射中腹部，由于没有医生在场，这名青年随后去世。

革命中的法国见证了又一次决斗，这已经不是什么新鲜事。在当时狂热的革命浪潮中，只有寥寥数人意识到，法国，甚至全世界，又失去了一个伟大的头脑。

决斗中被击中的青年名字叫做伽罗瓦 (E. Galois, 1811-1832)，他是一位颇具传奇色彩的数学家。数学家一般被认为是不食人间烟火，而且不能提起任何人的兴趣和引起任何人的共鸣，但伽罗瓦绝对是个例外，在全部数学史上，再没有比伽罗瓦更有说服力的例子了，无数学子因为伽罗瓦的故事而走上数学的道路。今年恰逢伽罗瓦诞辰200周年，我们有必要说下这段历史。

方程惹的祸

有文献记载，自人类文明诞生以来，就有了数学。古埃及文明、古巴比伦文明都曾孕育了繁荣的数学文化，这种文化反映在天文、宗教、艺术等各个方面。

汹涌的幼发拉底河和底格里斯河灌溉了肥沃的美索不达米亚平原，也孕育了高度的数学文明。从巴比伦时期起，已有简单的代数公式来计算二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解，即

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$



塔塔利亚最早给出了三次方程的一般解法

阿拉伯数学的突出成就表现在代数方面，《代数学》集中体现了阿拉伯人处理代数方程的方法观。至此，代数学的主要任务就是解方程。

欧洲数学直到文艺复兴才得到解放，《代数学》传到欧洲后，人们开始尝试去解三四次方程。按照当时的风俗，学者们不公开自己的成果，而是作为挑战别人和获取声望的工具。这还有个故事，塔塔利亚得出了三次方程的解，但被卡尔达诺 (G. Cardano, 1501-1576) 用某种办法窃取并将其发表在《大术》中，于是二者之间的争吵开始

变成一部无厘头剧。

三次方程得到解决后，卡尔达诺的学生费拉里 (L. Ferrari, 1522-1565) 又解决了四次方程，其解法也发表在《大术》中，而现在解三次方程的公式被称为“卡尔达诺公式”。其实卡尔达诺是个百科式的人物，其成就涉及数学、物理、医学方面，他还是最早提出复数概念的数学家。但卡尔达诺性格十分古怪，而且嗜赌如命，他七十一岁时通过占星术推算出自己将在1576年9月21日去世，但是到那一天时，他活得像头壮牛，为了保全自己大星象家的名声，就自杀了。

三、四次方程可解性，就是这些方程的解可以通过方程的系数经过加、减、乘、除以及开方等运算得出来，这种根的表示称为根式解或代数解。三、四次方程可解性的问题得到解决后，五次及五次以上的方程可解性似乎不是个难题，但这道题目出奇的难，300年间，竟然没有得到解决。

在这个过程中，拉格朗日 (J. L. Lagrange, 1736-1813) 的工作最为重要，1770年他发表《关于代数方程解的思考》，讨论了三、四次方程能根式解的原因，发现三次方程有一个二次辅助方程，四次方



卡尔达诺 (1501-1576)



费拉里 (1522-1565)



鲁菲尼 (1765-1822)



程有一个三次辅助方程，并将这些辅助方程称为原方程根的“预解函数”。他试图进一步推广这种方法，但在五次以上的方程遭到失败，于是便猜测五次方程不能根式解，但未能证明。

1799年间，意大利数学家鲁菲尼(P. Ruffini, 1765-1822)用拉格朗日的方法证明不存在一个预解函数能满足低于五次的方程，并明确提出要证明高于四次的一般方程不能用代数方法求解。

尽管取得了一系列进展，但这个问题似乎很难解决。

初生牛犊不怕虎

英年早逝常使人哀伤不已，特别是那些极有才能的数学家。阿贝尔(N. H. Abel, 1802-1829)1802年8月5日出生于挪威，1829年便因贫困去世。16岁时，阿贝尔就开始学习牛顿、欧拉(L. Euler, 1707-1783)，拉格朗日和高斯(C. F. Gauss, 1777-1855)的经典数学著作。18岁那年父亲去世，从此生活的重担就压在了他身上。19岁时，阿贝尔解决了五次及五次以上方程有无根式解这道让数学家头疼不已的难题，无奈当时挪威无人能看懂。

这个青年人的数学思想已经远远超越了挪威国界，他需要与有同等智力的人交流思想和经验。当时挪威的数学充其量也就算是四流，连三流都算不上，没人能看懂阿贝尔的论文。于是阿贝尔将论文寄给丹麦的数学家去审，丹麦数学虽然比挪威强，但也强不了多少，因此也没人能看懂。于是乎阿贝尔萌生了到欧洲大陆的数学强国去谋



阿贝尔(1802-1829)

求与顶级数学家对话的想法。

踌躇满志的阿贝尔自费印刷了证明五次方程不可解的论文(鉴于经费原因，他把内容压缩在了6页上)，并选择德国的柏林作为旅行的第一站。其实当时的法国是不可动摇的一流数学强国，阿贝尔为什么首选德国呢？主要是因为高斯，当时的德国数学虽是二流，但高斯却是超一流数学家，他的高度是无人可比拟的，如果能得到高斯的承认，那将会省去很多事情。

阿贝尔在柏林滞留了将近一年时间。虽然等候高斯召见的期望终于落空，这一年却是他一生中 most 幸运、成果最丰硕的时期。在柏林，阿贝尔遇到并结识了克雷尔(Crelle, 1780-1855)。克雷尔是一个铁路工程师，也是热心数学的业余爱好者，他以创办了世界上最早专门发表创造性数学研究论文的期刊《纯粹和应用数学》杂志而在数学史上占有一席之地，这本期刊后被称为“克雷尔杂志”，阿贝尔关于五次方程的文章就发表在克雷尔杂志的第一期。正是由于阿贝尔的

论文，克雷尔杂志才能逐渐提高声誉和扩大影响。

1826年7月阿贝尔从柏林抵达巴黎。在那里他拜访了勒让德(A. M. Legendre, 1752-1833)、柯西(A. L. Cauchy, 1789-1857)等法国著名的数学家，但结果仍令人失望。在巴黎的半年，阿贝尔从满怀希望到渐生疑虑终至完全失望。1826年底阿贝尔回到柏林，不久就染上了肺结核(另一说阿贝尔在巴黎便染上了肺结核)，这在当时可是不治之症。

窘迫和无奈之下，阿贝尔只得回国，但处境却更加艰难。挪威当时到底是弱国，而且处境闭塞，孤陋寡闻，他们连一个普通大学教授的教职都不能提供给阿贝尔，阿贝尔的生活已经非常艰难。1829年1月，阿贝尔的病情恶化，他开始大口吐血，并不时陷入昏迷。1829年4月6日晨，这颗耀眼的数学新



阿贝尔被视为挪威的民族英雄。挪威皇宫有一尊雕像，这是一个大无畏青年的形象，他的脚下踩着两个怪物——分别代表五次方程和椭圆函数



法国数学家柯西 (1789-1857) 被认为应该对阿贝尔的厄运负责



挪威数学家西罗 (1832-1888) 是研究阿贝尔工作的先驱之一



挪威数学家李 (1842-1899) 是李群的创始人, 出版了阿贝尔选集

星便过早地殒落了。阿贝尔死后两天, 一封信寄到了挪威, 告知柏林大学已决定聘请阿贝尔担任数学教授, 但阿贝尔已经永远读不到了。

读到此处, 我们不禁要问: 是谁该对伽罗瓦和阿贝尔迟迟未获得数学界承认的厄运负责呢? 人们很自然会想起审评论文的柯西。

柯西是当时法国数学的领袖, 数学史上论文最多的数学家之一。当时的柯西正年富力强, 创造力旺盛, 由于忙于自己的事而疏忽了阿贝尔的工作, 又由于波旁王朝被推翻流亡国外而错过了伽罗瓦的论文, 从而铸下大错。而柯西可能是当时唯一能理解伽罗瓦的法国数学家。关于柯西对伽罗瓦的论文的态度, 历史上存在两种不同的说法。一种说法是柯西根本没有把这篇出自一个名不见经传的中学生之手的论文当回事, 随手丢进了字纸篓。以致到现在, 很多人都把柯西当作埋没伽罗瓦的罪魁。另一种比较可信的说法是, 柯西看出了这篇论文的重要性, 并且希望伽罗瓦重新写一篇论文, 详细阐述他的理论。事

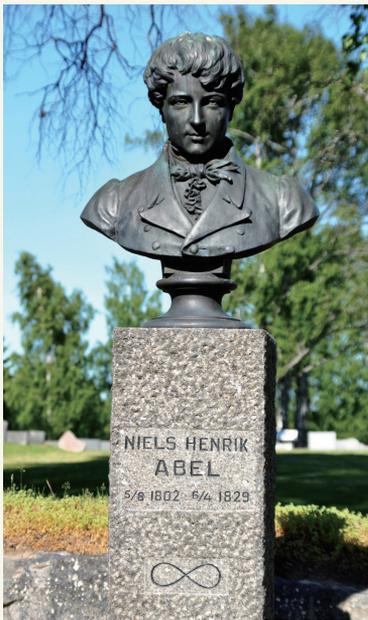
实上第二种说法更可信。

阿贝尔虽然不幸地去世了, 但是他的精神感召着挪威数学家。挪威虽小, 却出了不少的数学家, 继阿贝尔之后, 挪威又有两位世界级的数学家, 西罗 (P. L. Sylow, 1832-1888) 和李 (M. S. Lie, 1842-

1899), 这两位数学家的工作均为群论, 并且在数学大厦上永远留下了他们的名字。

西罗, 挪威数学家。早年为一名中学教师, 尽管教书占用了他大量的时间, 但西罗还是挤出时间来研究阿贝尔的论文。在 1862-1863 学年中西罗得到了克里斯蒂安尼亚大学的临时职位, 为学生讲授伽罗瓦理论和置换群。这可能是有记载的第一次讲述伽罗瓦理论。在西罗当年的学生中, 有一位后来成为著名数学家, 他就是李群理论的创始人——李。从 1873 到 1881 年, 西罗同李合作, 编辑出版了阿贝尔著作的新版本。1902 年又与别人合作出版了阿贝尔的通信集。

历史不会忘记这位杰出的数学家, 为了纪念挪威天才数学家阿贝尔诞辰 200 周年, 挪威政府于 2003 年设立了一项数学奖——阿贝尔奖。这项每年颁发一次的奖项的奖金高达 80 万美元, 相当于诺贝尔奖的奖金, 是世界上奖金最高的数学奖之一。而首位得主正是法国的一位数学家——塞尔 (J-P Serre,



阿贝尔的半身雕塑



1926-), 塞尔 28 岁便因为稳定同伦群的计算突破而得到菲尔兹奖, 我想这个记录恐怕要空前绝后了。而他现在所从事的问题, 恰巧为伽罗瓦理论的逆问题: 即给定一个群, 是否有有理系数方程以它为群呢? 这并不是一个简单的问题。

虽说阿贝尔的遭遇很不幸, 但如果他的遭遇与另一位数学家比起来, 简直可以说幸运的多。由于阿贝尔的早逝, 高次方程在什么情况下可解的充要条件并没找到, 而这个历史重任则交给了另一位比他小 9 岁, 身世比他更坎坷的数学家——伽罗瓦。

傲慢与偏见

在距离法国巴黎 18 公里的地方, 有一个宁静的小城镇, 名叫堡拉瑞恩 (Bourg La Reine), 城里有一条伽罗瓦街, 在大街的 54 号房的正面, 立着一块纪念碑, 上面写着: “法国著名数学家埃瓦里斯特·伽罗瓦, 生于此。卒年 20 岁, 1811-1832 年”。这块纪念碑是在 1909 年 6 月 13 日设立的, 而它所纪念的人已经长眠于地下 70 多年了。

当时法国是公认的一流数学强国, 没有之一。即使今天, 法国数学依然很强, 2010 年菲尔兹奖得主中有两位正是法国数学家吴宝珠 (越南裔) 和维拉尼 (C. Villani)。巴黎综合工科学学校和巴黎高等师范学校是令无数学生梦寐以求的院校, 而这两所学校的建立都得益于法国大革命。

在大革命前, 法国的社会矛盾已到不可调和的地步。由于波旁王朝残酷的统治, 巴黎人民再也忍



数学家蒙日 (1746-1818) 是巴黎高工的第一任校长

无可忍, 关于这一段的描述, 法国作家狄更斯的《双城记》无疑最具代表性: 那是最美好的时代, 那是最糟糕的时代; 那是智慧的年头, 那是愚昧的年头; 那是信仰的时期, 那是怀疑的时期; 那是光明的季节, 那是黑暗的季节; 那是希望的春天, 那是失望的冬天; 我们拥有一切, 我们一无所有; 我们全都在直奔天堂, 我们全都在直奔相反的方向——简而言之, 那时跟现在非常相象, 某些最喧嚣的权威坚持要用形容词的最高级来形容它。说它好, 是最高级的; 说它不好, 也是最高级的。

1789 年巴黎人民攻占了巴士底狱, 里面虽然只有 6 个政治犯, 但却是史上最伟大的起义。法国的革命风暴吓坏了欧洲大陆的其他君主, 他们纷纷组织反法同盟。1792 年法国军队在瓦尔密战役中打败了外国干涉军, 获得了难得的喘息之机。为了正在进行的战争, 法国迫切需要工程师构建堡垒、修筑道路和桥梁以及从事有关枪炮方面的工作, 1795 年法国巴黎综合工科学



数学家孔多塞 (1743-1794) 在法国大革命时被送上断头台

校应运而生, 著名数学家蒙日 (G. Monge, 1746-1818) 是这所学校的第一任校长。

在这之前的 1794 年, 巴黎高师也成立了, 傅里叶 (J. Fourier, 1768-1830) 被聘为该所院校的教授, 而这也是伽罗瓦的母校, 可惜母校将这名桀骜不驯的学生给开除了。

伽罗瓦生于 1811 年 10 月 25 日, 这时的法国大革命正如火如荼, 不过革命的血腥气息没有那么浓了。这也是著名的拿破仑时代, 由于拿破仑对数学和历史的热爱, 法国的数学取得了长足的进步, 无数数学家与拿破仑交上了朋友。但从巴黎起义到拿破仑称帝之前, 整个革命可谓血雨腥风。革命狂潮中的人民将矛头指向了那些在科学院享受政府津贴的院士和科学家们, 当时的口号就是: “共和国不需要科学家!” 拉瓦锡 (A. L. Lavoisier, 1743-1794)、孔多塞 (M. M. Condorcet, 1743-1794) 等科学家被送上了断头台。尤其是孔多塞, 他是著名的数学史专家, 具体负责了巴黎综合工科学学校和高等师

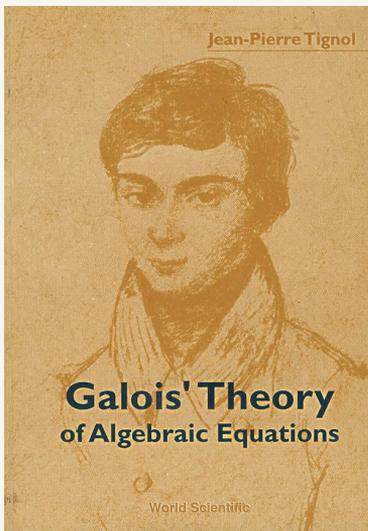


范学校的组建工作，以撰写的欧拉传记中“欧拉死了，他停止了计算和呼吸”而闻名，竟然也被残忍地杀害。大革命虽然促进了法国科学的发展，但为数不少的科学家在大革命中被送上断头台，更为可悲的是，法国科学院的院士们变得畏畏缩缩、老态龙钟，他们显然被大革命吓破了胆。

伽罗瓦还没学会说话，拿破仑就已经迫不及待地布置侵俄战争。1812年，侵俄战争失利，拿破仑帝国趋于崩溃。1814年4月拿破仑战败，法兰西第一帝国灭亡。继而波旁王朝复辟，法国又开始了封建王朝统治。1815年3月14日，被监禁在厄尔巴岛的拿破仑卷土重来，发动了“百日政变”。伽罗瓦的父亲正是在这期间当选为堡拉瑞恩市的市长，而且一直干了15年。伽罗瓦的母亲是位当地法官的女儿，聪明而有教养，但个性倔强，甚至有些古怪。她是伽罗瓦的启蒙老师，主要教授他希腊语和拉丁语，为他打下了极好的语言基础。

拿破仑发动“百日政变”后，惊恐的反法同盟立刻组织数倍于拿破仑的兵力侵犯法国，双方在滑铁卢展开激战，不幸的是，拿破仑遭到了失败。在敌人兵锋指向巴黎的时刻，有人建议拿破仑把巴黎综合工科学学校和高等师范学校的学生派上战场，这一建议被拿破仑断然拒绝，并留下了永恒的话语：我怎么能为了取金蛋而杀掉下蛋的母鸡呢？这句话的代价是：拿破仑被流放到圣海伦岛，但他保证了法国数学几十年内统治世界，单从此项就能看出拿破仑不愧为伟大的君主。伽罗瓦的少年时代就是在这样的动荡不安、风浪迭起的年代里度过的。

1823年10月，伽罗瓦12岁了，



印有伽罗瓦头像的“伽罗瓦代数方程理论”一书

他离别了双亲，考入路易·勒格兰皇家中学，即现在路易·勒格兰高等专科学校，开始接受正规教育。

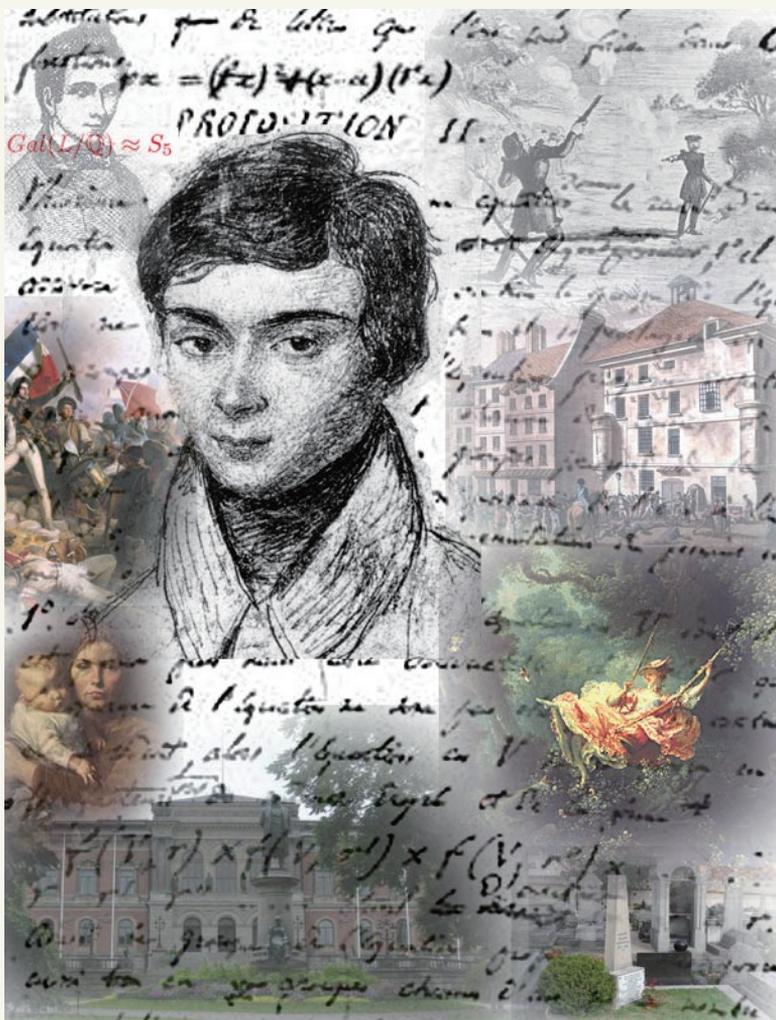
伽罗瓦确实是一位聪明机敏的学生，在中学的前两年，他是个优等生，特别是希腊语和拉丁语成绩突出，多次获奖，但当时他并不能算是出类拔萃的学生。第三学年（1826年），他对修辞学没有下足够的功夫，因而只得重读一年。这件使伽罗瓦感到难堪的坏事，却给他创造了接触数学的机会。校方批准他可以去听数学课。这时他已经15岁了。与年幼起就对数学产生浓厚兴趣，而后来在数学上取得伟大成就的数学家牛顿（Newton, 1643-1727）、欧拉、高斯、柯西相比，伽罗瓦接触数学似乎太晚了。

总有人是为数学而生的，伽罗瓦似乎便是这样一个人。伽罗瓦一接触数学，立即就被数学的神秘迷住了，以至于老师不止一次提醒他要顾及其他学科。他如饥似渴地吸取数学营养，但很快就满足于教科书的贫乏、琐碎，同时对那些不

谈推理方法而只注重形式和技巧问题的数学方法感到厌倦。于是，他毅然抛开教科书，直接阅读数学大师的专著。勒让德的经典著作《几何原理》，使他领悟到数学推理方法的严密性；拉格朗日的《解数值方程》、《解析函数论》等著作，不仅使他的思维更加严谨，而且其中的思想方法对他的工作产生了重要的影响；接着他又研究了欧拉、高斯和柯西的著作，为自己打下了坚实的数学基础。学习和研究数学大师的经典著作，从中学习最先进的数学思想，了解当时数学发展的动态，这是伽罗瓦获得成功的重要途径。学完了这些数学大师的著作，他坚信自己能做到的绝不会比他们少。伽罗瓦的一位老师说：“他被数学的鬼魅迷住了心窍”。不过，忽视了其他学科导致了他首次（1828年）报考巴黎综合工科学学校失败。

1828年10月，伽罗瓦从初级数学班升入高级数学班。这时阿贝尔早已完成了自己在代数方程的工作而全身投入椭圆函数的研究当中，但伽罗瓦毫不知情，他也开始涉足这一领域。他遇到了才华横溢、热情宽厚的数学教授理查德（L. P. E. Richard）。他是一位令人尊敬的学者，25岁时就已是一名数学教授了。他讲课优雅动人，思维清晰深刻，很受学生们的欢迎，特别是他具有发掘和培养科学英才的敏锐判断力和高度责任感。经他发现和培养的著名科学家，除了伽罗瓦以外，还有海王星的预测者、著名的天文学家维尔叶（L. Verrier, 1811-1877）和19世纪杰出的数学家埃尔米特（C. Hermite, 1822-1901）。

理查德发现伽罗瓦具有敏锐的洞察力，他不仅能很快地学会和



伽罗瓦头像

掌握现成的知识和方法，而且能领悟和发现新的思想方法。理查德认定伽罗瓦具有非凡的数学天赋，并断言：“伽罗瓦只适宜在数学的尖端领域中工作”。面对老师的赏识和鼓励，少年伽罗瓦更加努力地学习。当时，年仅17岁的伽罗瓦开始着手研究关于方程理论、整数理论和椭圆函数理论的最新著作，并取得了初步成果。1829年3月，伽罗瓦在理查德老师的帮助和推荐下，发表了他的第一篇论文，

题目是“周期连分数的一个定理的证明”，刊登在法国数学家热尔岗（Gergonne, 1771-1859）于1818年创办的第一个专业性数学杂志《纯粹和应用数学年刊》上，他更为清楚地论述和说明了欧拉与拉格朗日关于连分式的结果，这标志着伽罗瓦学术生涯的开始。

正当学术上取得重大成就时，伽罗瓦的生活却发生了重大变故。在伽罗瓦准备再次报考巴黎综合工科学校的前夕，他深深爱戴的父亲，

由于受不了当地怀有恶意的牧师的诽谤，于1829年7月2日饮恨自杀了。这次可怕的打击及接踵而来的不幸，给伽罗瓦的心灵留下了深深的印记。之后不到一个月，伽罗瓦参加了巴黎综合工科学校的入学考试。伽罗瓦对这次考试充满信心，老师和同学们对伽罗瓦的天赋和学识也深信不疑，但是他的希望又一次化为泡影。在入学前的面试中，主考人故意提出一些人为制造的、错综复杂的问题刁难伽罗瓦，伽罗瓦认为问题提得不恰当，只作了简单回答。接着主考人又就对数提出了一些问题，伽罗瓦认为这些问题过于简单。伽罗瓦的傲慢态度无疑使主考人感到难堪和不自在。伽罗瓦想对主考人介绍自己在数学上的研究成果，没说几句，主考人竟然放声狂笑起来，因为他们绝不相信眼前这位羸弱的少年会对他们谈论如此高深的数学问题。伽罗瓦对主考人的狂傲终于忍受不住了，他不顾一切地将黑板擦布扔向主考人。就这样，伽罗瓦第二次蒙受了落榜的耻辱，再一次被综合工科学校拒之门外。

伽罗瓦不是那种备受社会关注和特殊培养的骄子，他面对的是接二连三打击、社会的压制、命运的挑战。年轻的伽罗瓦并没有屈服，尽管父亲的死及两次落考使伽罗瓦悲痛不已，但他仍然“沉着而镇静”。伽罗瓦听从理查德教授的劝告，报考了巴黎高等师范学校，1829年10月25日他被录取入学，生活费用总算有了保证。

当时的高等师范学校可没有综合工科学校这么出名，伽罗瓦报考高等师范显然是不情愿的。这种情况一直到1861年才得到改变，达布（Darboux, 1842-1917）在这

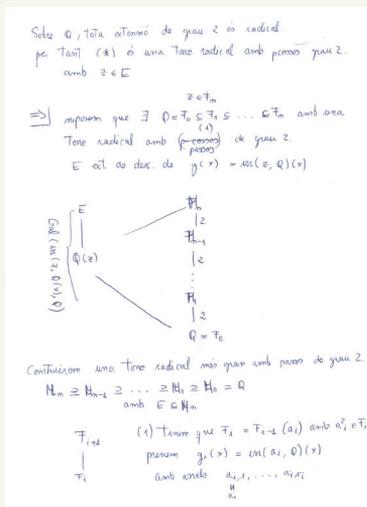


一年同时考上了工科学校和师范学校，而且都是第一名，但达布毅然选择了高师，从而开了一个先例，从此大批优秀数学家成了高等师范学校的毕业生，如风靡一时的布尔巴基学派成员几乎全部毕业于高等师范学校。

就在入学前的1829年5月25日和6月1日，伽罗瓦先后将研究方程根式解充要条件的成果写成论文，呈送法国科学院。科学院请柯西做论文的主审，这时正值阿贝尔去世不久。

柯西是当时法国乃至全世界最杰出的数学家之一，一生发表过800多篇论文。当时他已经研究过作为群论先驱的置换理论，并且后来就群论本身也广泛地进行过研究。但伽罗瓦的论文新概念较多，论述过于简略，柯西便建议他再次修改论文。于是，伽罗瓦又写了一篇详细的论文，于1830年2月呈交法国科学院。这次论文的主审是科学院常务秘书傅里叶(J. B. J. Fourier, 1768-1830)。可惜，傅里叶还没来得及审查伽罗瓦的论文，就在这年的5月因病去世了，在他的遗物中未能发现伽罗瓦的手稿。这使伽罗瓦感到愤怒。他写信质问法国科学院，为什么对“小人物”的研究成果如此轻慢。在这种情况下，科学院只好建议伽罗瓦再次呈交他的论文。伽罗瓦于1831年1月第三次提交他的论文，题目是“关于方程根式解的条件”。在论文后，伽罗瓦还附上了一篇简短绪言，他请求审稿人至少要仔细阅读他写的论文。

法国科学院委托泊松(S. D. Poisson, 1781-1840)和拉克鲁瓦(S. F. Lacroix, 1765-1843)审查伽罗瓦的论文。这两位数学家虽然认真



伽罗瓦的手稿

地审阅了这篇论文，可得出的结论却是“不可理解”。在他们给科学院的报告中说：“我们已经尽了我们的最大努力来研究伽罗瓦的证明，他的推理显得不很清楚，到目前为止，我们还不能对它作出正确评价，因为说有说服力的证明还没有得到。因此，在这篇报告中，我们甚至不能给出他的证明思想。”事实上，他们没有完全看懂伽罗瓦的文章。这样，伽罗瓦的伟大发现再次被学术界否定了。

这一系列不幸的遭遇接连落在青年伽罗瓦身上，使他感到自己成了一个恶劣的社会机构的牺牲品，这个机构常常化天才为庸常。他很自然地咒骂万恶的压迫制度，正是这个制度将他的父亲逼上了绝路。在他胸中正酝酿着一场与社会抗争的暴风骤雨。

伽罗瓦的失败不过是当时社会的一个缩影，波旁王朝残酷的统治，迫使巴黎人民再度起义，法国“七月革命”爆发了，伽罗瓦对这个社会的厌恶已经到了不可忍受的地步。没有资料显示伽罗瓦以前的

政治立场，参与政治也许是自己的一时冲动，也许是对这个社会的极端愤慨。他立即卷入了这场风潮，成为一名勇敢的战士，开始了自己的政治生涯。

七月革命源于查理十世的赦令，赦令破坏了1814年《宪章》的精神，严重侵犯了资产阶级的利益，人民群众的生活更加惨淡。1830年7月27日，几千名工人和手工业者走上街头，与军警发生冲突。28日黎明，起义开始。工人、手工业者、大学生和国民自卫军建筑街垒，夺取武器库，攻占市政厅。7月29日，起义者控制了巴黎，占领卢浮宫和杜伊勒里宫，外省发动的起义也取得胜利，但起义的成果被菲利浦(L. Philippe, 1773-1850)窃取。整个起义的过程中，没有巴黎高师的学生。

高等师范学校当时是法国最保守的学校之一，这里的生活方式与修道院极为相似。吃饭前和早课前后，学生们都要大声朗读祈祷文，睡觉前必须听某一宗教题目的谈话，每个月还要做一次忏悔。学校还规定，如果学生一连两个月不做忏悔的话，就要被开除出校。这种保守沉闷的学习和生活环境，使伽罗瓦感到非常压抑。

师范学校的校长吉尼奥(M. Guigniault)坚决反对学生们参加7月27日—29日推翻波旁王朝的示威游行活动，甚至将学校的大门锁上，防止学生们上街。伽罗瓦不顾一切地想溜出校门，投入到街上那情绪激昂的人群中去，但他几次努力都失败了。1830年11月，19岁的伽罗瓦勇敢地参加了资产阶级共和派激进分子组成的“人民之友协会”，他是师范学校唯一参加这个组织的人，同时他还报名参加了国



法国 19 世纪著名的浪漫主义油画家德拉克洛瓦 (E. Delacroix, 1798—1863) 反映法国七月革命的画作《自由领导着人民》

民自卫军炮兵队，他的政治生涯正式开始了。

1830 年 12 月 5 日，《学校公报》发表了一篇嘲讽校长吉尼奥在七月革命中投机行为的文章，并援引一封署名“师范大学一学生”的公开信，用事实揭露了吉尼奥的不光彩行为。吉尼奥恼羞成怒，未经调查就认定这封信是伽罗瓦写的。4 天后，吉尼奥在尚未得到批准的情况下，滥用校长职权，宣布开除伽罗瓦的学籍。而这篇文章是否真的出自伽罗瓦之手，至今还是一个未解之谜，伽罗瓦本人对此也未置可否。不过在这一事件中，伽罗瓦成了唯一的受害者。1831 年 1 月 8 日，国民教育委员会批准了开除伽罗瓦的决定。于是，这位 19 世纪最有才华的青年被剥夺了最后深造的机会。

离开了学校，同时也失去了生活费的来源，他只好住在母亲那

里。但他不愿给不幸的母亲再增加负担，1831 年 1 月 9 日，他在《学校公报》上刊登了一则启事，说以后每逢星期四下午他将在凯洛特小书铺讲授高等数学，讲座将向听众介绍他自己不曾公开讲授的若干理论。在当时的法国还没有如此年轻的科学家，因生活所迫而靠讲授自己的学术见解谋生，这也说明伽罗瓦具有常人少有的坚强高傲的个性。除此之外，辍学后的伽罗瓦把更多的精力和热情都投入到日见激烈的政治活动中去。

1831 年 4 月初，“人民之友协会”举行了一次 200 人规模的庆祝胜利的宴会。为了避免与警察发生冲突，预先准备了措词谨慎的祝酒词。与会者频频举杯，不断抨击政府。在宴会将结束时，伽罗瓦充满激情地一手举杯一手持刀，站起来说道：“为了路易·菲利浦干杯！”会场顿时大乱起来。第二天，伽罗

瓦以教唆谋杀法兰西国王生命未遂罪而被捕入狱。由于拿不出确凿的证据，再加上共和党人律师的尽力辩护，法庭只好宣布伽罗瓦无罪释放。

1831 年 7 月 14 日，伽罗瓦率众上街示威游行时再次被捕，并被判处 9 个月监禁，押在圣佩拉吉监狱。监狱的环境非常恶劣，几十个人关在一间牢房里。伽罗瓦在拥挤嘈杂的牢房里顽强地进行数学研究工作，他整理了以前的论文，研究了阿贝尔的椭圆函数，并为两部著作写了序言，准备出狱后再版。

1832 年 3 月 16 日，伽罗瓦因病被转移到一家私人医院中服刑。这个医院的领导人福尔特里埃 (Faultrier) 也为警察局做情报工作。1832 年 4 月 29 日，伽罗瓦刑满释放。重获自由的伽罗瓦，决定要在一个月内尽情享受自由者的轻松和快乐。伽罗瓦的好友舍瓦烈 (A. Cheralier) 这时正在孟尼尔坦的圣西门公社里，过着安闲恬静的生活，他写信邀请伽罗瓦与他一起分享着田园式的清闲，以躲避尘世的纷扰。伽罗瓦拒绝了，他准备在 6 月初离开巴黎，去做他想做的事。

但是，一场意想不到的灾难又一次降临在他的头上。

伽罗瓦在福尔特里埃的家里遇到了一个青年女子，对她一见倾心，并和她相处了一段日子。但后来的发展由于另一个男人的加入而发生了急剧的变化。为了了结这场感情纠葛，两人决定于 5 月 30 日展开一场决斗。

思想日渐成熟的伽罗瓦，并不是仅凭一时的感情冲动去参加这场决斗的。他预感到自己在这场决斗中可能身遭不幸，于是，他在参加决斗的前一天，异常冷静地写下

漫画作者：康永君



了三封著名的信。一封是致 N. L. V. D. (这个人是谁, 至今还是个谜) 的信, 信中说: “你们的任务很简单: 你们应当证实, 我是违背自己的意愿而参加决斗的。”

第二封信是写给全体共和派的朋友们, 他激动地写道: “我将成为一个下流的卖俏女人的牺牲品而死去。” 在信中谈到这场决斗时, 伽罗瓦说: “苍天作证, 我曾想尽方法试图拒绝这场决斗, 只是出于迫不得已才接受了挑战。” 从这两封信中, 我们清楚地看出, 伽罗瓦并不是盲目冲动地拿自己宝贵的生命来了结这场个人纠纷的, 而是经过了种种努力, 想用其他和平方式来解决两人之间的纠葛。仅凭我们对伽罗瓦个性的了解, 也不难

想象的出, 伽罗瓦是会接受这场挑战的。

第三封信是写给他的好友舍瓦烈的, 这封长信主要谈论数学问题。它显示了伽罗瓦在生命即将结束的时刻, 仍然惦记着他一生为之奋斗的事业——数学。在信中, 伽罗瓦概括总结了自己几年来的研究成果, 面对这些凝聚着自己的智慧和心血, 又被一些学术权威多次否定的论

文, 伽罗瓦坚信它们是正确的, 因此, 他委托舍瓦烈妥善保管, 并在适当的时候, “请你公开向雅克比和高斯请教, 并请他们发表自己的意见, 但不是谈论定理正确与否, 而是谈论这些定理的意义”。

死神正在一步一步地向伽罗瓦走来, 他的头脑异常清醒。他快速而认真地审校他的论文, 然而时间太紧迫了, 他不得不在论文的空白处写下了这么一句话: “这个论据需要补充。现在没有时间。” 人们无不为伽罗瓦临死前所表现出的镇静和高尚的敬业精神而感动。

第二天, 即 5 月 30 日的清晨, 伽罗瓦和他的对手如约来到冈提勒的阁拉塞尔湖畔。两人在相隔 25 步的地方互相射击, 一颗子弹无情

地射中了伽罗瓦的腹部。一生刚直不屈的伽罗瓦倒下了, 倒在了青春的草地上。几小时后, 当地的一个农民偶然发现了, 把他送往科申医院。第二天, 即 5 月 31 日, 这位未满 21 岁的数学家与世长辞了。

优美的理论

1828 年伽罗瓦开始研究方程论时, 他决心要解决这个阿贝尔不曾完成的问题。阿贝尔在 1826 年得到的阿贝尔定理:

不是所有五次方程都有根式解。

伽罗瓦进一步指出哪些方程可根式解, 哪些不可以根式解:

一个代数方程可根式解, 当且仅当它对应的群是可解群。

伽罗瓦解决高次方程不可解的理论现在被称为伽罗瓦理论。在代数方程论方面, 拉格朗日的工作具有历史性贡献, 他在 1770 年前后, 利用统一的方法 (现在称为拉格朗日预解式方法), 详细分析了二次、三次、四次方程的根式解法, 提出了方程根的排列置换理论是解决问题的关键所在。他的方法对于求解低次方程卓有成效, 但对一般的五次方程却没有任何明确的结果, 致使他对高次方程的求解问题产生了怀疑。所以, 他预见到也许五次及以上的一般方程没有根式解 (但未能给出证明)。

在拉格朗日工作的影响下, 高斯解决了一类特殊的代数方程的可解性问题, 鲁菲尼于 1799 年首次证明了高于四次的一般方程不能用根式法求解, 但其“证明”并不完善。后来阿贝尔于 1824-1826 年



伽罗瓦之墓

修正了鲁菲尼证明中的缺陷，严格证明了一般的五次或五次以上的代数方程不可能有根式解。

此外，阿贝尔在研究工作中需要解决两类问题：一是构造任意次数的代数可解方程；二是判定已知方程是否可用根式求解。阿贝尔试图全面刻画可用根式求解的方程的特性，但因早逝而没能完成这项工作，他只解决了第一类问题。几年后，伽罗瓦接过他的工作，用群的方法彻底解决了代数方程的可解性问题，创立了所谓的“伽罗瓦理论”。

伽罗瓦是通过改进拉格朗日的思想来研究可用根式求解的代数方程的特性的。因为对于一般方程来说，拉格朗日预解式的构造并不

存在明确的方法，而对于较特殊的方程，要构造预解方程也需要一定的技巧。伽罗瓦的思想是设法绕开拉格朗日预解式，他把代数方程可解性理论问题转化为与方程相关的置换群及其子群结构的分析问题，根据置换群的结构确定方程根的结构，这是伽罗瓦工作的重大发现。

伽罗瓦系统研究方程根的排列置换性质，首次定义了置换群的概念，他认为了解置换群是解决方程理论问题的关键。在他 1831 年的论文中，伽罗瓦首次提出“群”这一名称，他把具有封闭性的置换的集合称为“群”。实际上，这只是抽象群的一条重要性质而已。

伽罗瓦的工作中引进了三个

具有决定意义的概念：伽罗瓦群、正规子群、可解群，并利用它们三者之间的内在关系系统解决了代数方程可解性问题。

首先，伽罗瓦注意到每个方程都可以与一个置换群联系，即与它的根之间的某些置换组成的群联系，现在称之为伽罗瓦群。对于任一个取有理数值的关于根的多项式函数，伽罗瓦群中的每个置换都使这函数的值不变。反过来，如果伽罗瓦群中的每个置换都使这个函数的值不变，则这多项式函数的值是有理的。因此一个方程的伽罗瓦群完全体现了它的根（整体）的对称性。伽罗瓦为了刻画可用根式求解的代数方程的特性，将每个方程对



应一个域，即含有方程全部根的域（现在称之为方程的伽罗瓦域），这个域又对应一个群，即这个方程的伽罗瓦群。这个方程是否可用根式求解的关键是：这个方程的系数域是否可以经过有限次添加根式而扩张为根域。伽罗瓦经过认真研究，引入了域上的自同构群的概念，使域与群发生了联系，即建立了伽罗瓦域的子域与伽罗瓦子群之间的一一对应关系。

伽罗瓦的第二个重要概念是正规子群。它是伽罗瓦将二项方程作为辅助方程进行研究时引入的。正规子群概念的进入及其性质、作用的研究，是伽罗瓦工作的又一重大突破。利用它可以区分合成群与单群的概念；利用它的性质还可以判别已知方程能否转化为低次方程的可解性问题。他的思想方法大致是这样的：首先定义正规子群的概念，即群 G 的子群 N 叫做 G 的正规子群，是指对于每个 $g \in G$, $g^{-1}Ng=N$ ；其次是寻找极大正规子群列，确定极大正规子群列的一系列合成因子。如果一个群所生成的全部合成因子都是素数，就得到了伽罗瓦的第三个重要概念：可解群。

伽罗瓦所用的“可解群”术语非常恰当。他利用这一概念刻画了用根式解方程的特性，给出了一个方程可用根式解的判别准则：一个方程可用根式解的充要条件是这个方程的伽罗瓦群是可解群。虽然这一准则不能使一个确定方程的精确求解更为简单，但它确实提供了一些方法，可以用来得出低于五次的一般方程，以及二项方程和某些特殊类型方程的可解性的有关结果，还可以直接推论出高于四次的一般方程的不可解性。

伽罗瓦的这种思想方法与众



法国数学家若尔当（1838-1922）被称为使伽罗瓦理论显著增色的第一人

不同，他没有像他的前辈那样直接进行计算，而是提出群的概念，研究群的结构，从观念上突破了传统的思维方式，使人们从偏重计算的研究方式转变为用“群结构”观念思维的方式，并用这种观念构造新的证明。

伽罗瓦的奠基性工作及其思想中孕育的开创精神，并未得到他同时代人的充分赏识和理解，其原因不是人为的偏见，而是当时人们认识上的不足。伽罗瓦死后，他的全部数学著作由他的弟弟转给了舍瓦烈，但舍瓦烈找不到愿意出版这些著作的人。随着时间的推移，伽罗瓦的名字渐渐地被人们遗忘了。一直到 1846 年，即伽罗瓦去世后 14 年，刘维尔在其主办的《纯粹与应用数学》杂志上编辑出版了伽罗瓦的部分文章，并受到法、英、德、意大利等国数学家的关注。特别是法国数学家若尔当（M. E. C. Jordan, 1838-1922）1870 年出版的《置换与代数方程专论》首次清晰和完整地介绍了伽罗瓦的理论。此后，群论和伽罗瓦的工作开始慢慢

归入数学的主流，不过那已经是伽罗瓦身后半个世纪的事情了。

阿贝尔、伽罗瓦的一生如同倏忽即逝的流星，但他们却在天际留下了永恒的光芒。也许是上天的有意安排，当 they 与柯西、傅里叶这样的巨星相遇时，没有产生更为绚烂的碰撞，而是擦肩而过，徒令后人唏嘘。我们既无法设想阿贝尔和伽罗瓦在受到不公正对待时心中的愤恨，我们也很难想象如果柯西和傅里叶地下有知将作何感想！毕竟历史不能假设。但我们知道两百年来，伽罗瓦的传奇经历激励了一代又一代人为数学而奋斗；两百年过去了，伽罗瓦及其成就仍然横亘在现代数学的入口处，无数人瞻仰乃至膜拜，却从未被超越亦或取代。谁也说不清楚，伽罗瓦的一生，到底是天纵英才还是天妒英才？



作者介绍：

邓明立，河北师范大学副校长，数学教授，本刊编委。